

Санкт-Петербургский государственный университет

Направление 01.06.01 «Математика и механика»

Основная образовательная программа МК.3001.2017 Математика

Магеркин Валентин Вячеславович

Распределенное управление
многоагентными робототехническими
комплексами

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Матвеев А. С.

Рецензент:
к. ф.-м. н. Семакова А. А.

Санкт-Петербург
2021

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Valentin Magerkin

Distributed control of multiagent robotic teams

Graduation Thesis

Scientific supervisor:
professor Matveev A. S.

Reviewer:
Semakova A. A.

Saint-Petersburg
2021

Оглавление

1. Введение	4
2. Постановка задачи	7
3. Необходимые условия и предположения	10
4. Закон управления	13
5. Основные результаты	15
6. Доказательства	18
6.1. Вспомогательные утверждения	18
6.2. Доказательство лемм из раздела 3	19
6.3. Доказательство теорем 1 и 2: Поведение в режиме \mathfrak{R}	20
6.4. Доказательство утверждений i)—iv) теорем 1 и 2	22
6.5. Доказательство утверждения v) теорем 1 и 2	32
7. Результаты компьютерной симуляции	34
8. Заключение	39
Список литературы	40

1. Введение

За последние десятилетия проблема автоматического позиционирования и координации группы мобильных роботов стала широко изучаемой^[21,23]. Основной интерес в данной области представляют задачи децентрализованного распределённого управления в условиях сенсорных ограничений и отсутствия коммуникации между роботами. В частности, множество работ посвящено задаче автономного позиционирования группы мобильных роботов на плоскости в формацию, окружающую целевой объект^[2,6,8–14,26,27,29–31].

Интерес к данной задаче наблюдается во многих областях, связанных с обеспечением безопасности, проведением спасательных операций, транспортировке больших объектов, сопровождением, разведкой и патрулированием, созданием сетей мобильных роботов^[25], и т.д. В данных задачах целью может быть как отдельный объект, так и группа объектов. В некоторых случаях целевой объект может быть рассмотрен в качестве точки, в других — представлен подвижным телом на плоскости, изменяющимся со временем.

В данных задачах группа роботов должна приблизиться к целевому объекту и занять позиции, выгодные в рамках конкретной задачи. Геометрическое место точек таких позиций может быть представлено кривой, зависящей от целевого объекта, например, окружностью с центром в точечной цели, или множеством точек, равноудалённых от границ целевого объекта, или множеством точек, находящихся на заранее заданном среднем расстоянии от группы целей, и т.д. После достижения данной кривой роботы должны постоянно следовать за ней. Поскольку их скорость, в общем случае, превышает скорость цели, роботы должны двигаться вдоль целевой кривой, окружая целевой объект. Также дополнительно может потребоваться распределение роботов вдоль кривой на примерно равные расстояния друг от друга.

До сих пор исследования задачи преследования и окружения цели группой мобильных роботов были сфокусированы на рассмотрении точечных целей. Случай полноприводных роботов и одной подвижной цели с доступной для измерения скоростью рассмотрен в [11]. Роботы типа Хилари рассмотрены в [30] и представлены доказательства локальной устойчивости группы роботов. Предполагая, что цель следует известному алгоритму побега, [29] предоставляет условия, при которых линейный закон управления приводит группу идентичных полноприводных роботов с полным наблюдением в формацию, окружающую цель. Схема циклического преследования используется в [10] для обеспечения захвата цели, движущейся в трехмерном пространстве на заданной высоте, при условии доступа к вектору скорости цели, как в [11]. В случае неподвижной цели результаты, полученные в [10], распространены на группу идентичных устойчивых неполноприводных роботов в [9].

Схема циклического преследования предполагает устойчивый кольцевой граф ин-

формационных потоков. Более общий класс графов рассмотрен в [8] для подвижной цели с измеряемым вектором скорости. Схожие исследования проведены в [12, 24], где предполагаются неточности в данных о цели в [12] или в передаваемой информации в [24], а также доступ каждого робота к скоростям и ускорениям остальных членов группы. Более реалистичный случай рассмотрен в [6], где каждый робот наблюдает только за своим предшественником и последователем при круговом обходе целевого объекта. В то время как приведенные выше статьи предполагают неограниченный диапазон видимости, [2] рассматривает случай конечного диапазона и показывает, что предложенный закон управления обеспечивает локальную устойчивость равномерного построения вокруг неподвижной цели, при этом не приводит доказательств глобальной сходимости. Непредсказуемо движущаяся точечная цель и роботы с ограниченной скоростью и ускорением и конечным диапазоном видимости рассмотрены в [16], где доказано, что предложенный закон децентрализованного управления приводит роботов на заданное расстояние от цели и обеспечивает равномерное распределение роботов вдоль соответствующей движущейся окружности вместе с желаемой общей угловой скоростью движения вокруг цели.

Случай нескольких неизвестных целей был изучен только для группы точечных целей и единственного робота-преследователя. В [4] рассматривается робот, движущийся вдоль окружности с центром в средней точке между целями при условии их неподвижности, иначе — присутствует погрешность пропорциональная их скорости. Для робота типа машины Дубинса закон управления из [17] приводит среднее расстояние до движущихся целей к желаемому значению. Схожий результат получен в [18] в случае расстояния до ближайшей цели в качестве целевой метрики.

Случай неподвижного протяжённого плоского объекта в качестве цели рассматривается в [22], где даётся управление для группы роботов типа машины Дубинса, приводящее к окружению целевого объекта на заданном расстоянии с равномерным распределением вдоль соответствующей кривой. Окружение произвольно движущегося и деформирующегося объекта одним единственным роботом изучается в [20]. В обеих статьях законы управления подкреплены доказательствами глобальной сходимости.

Между тем многие вопросы в обсуждаемой области исследований остаются открытыми. Например, не изучена задача окружения несколькими роботами подвижного протяжённого объекта, то же самое верно и для группы точечных целей. Данная работа призвана заполнить эти пробелы.

В частности, в данной работе рассматривается непредсказуемо движущаяся и изменяющаяся со временем кривая Жордана, являющуюся геометрическим местом точек предпочтительных позиций вокруг целевого объекта или группы объектов. Также рассматривается группа точечных роботов, чья динамика задаётся вектором ускорения. Нормы данного вектора и вектора скорости ограничены. В своей локальной систе-

ме координат каждый робот может определить положение других роботов и кривой в пределах конечного диапазона видимости, ближайшую точку целевой кривой, направление собственного вектора скорости и тангенциальную скорость относительно кривой. Никакой робот не может определить скорость других членов группы, не может различать их или контактировать с ними по средствам связи. Группа роботов должна достигнуть целевую кривую, отслеживать её, двигаясь в общем заранее заданном направлении, и достичь эффективного распределения вдоль неё.

Данная работа раскрывает условия, необходимые для выполнения задачи, и представляет децентрализованный распределенный закон управления, который решает задачу и исключает столкновения между роботами лишь при небольшом улучшении необходимых условий. Также представлены доказательства глобальной сходимости и результаты компьютерной симуляции. Представленный закон управления является гибридным: он сочетает в себе переключение между двумя дискретными режимами на основе событий с нелинейным регулированием в каждом режиме. Кроме того, данный закон управления является эффективным в вычислительном плане и реактивным, т.е. он напрямую преобразует текущее наблюдение в управляющее воздействие.

Текст работы организован следующим образом. Раздел 2 описывает проблему. Раздел 3 содержит необходимые условия для выполнения задачи и предположения. Закон управления и основные результаты представлены в разделах 4 и 5, соответственно. Все доказательства вынесены в раздел 6. Раздел 7 приводит результаты компьютерной симуляции. Раздел 8 содержит краткие выводы.

2. Постановка задачи

Каждый из N планарных роботов приводится в движение вектором ускорения, ограниченным по норме константой \bar{a} . Скорость каждого робота не превосходит величину $\bar{v} > 0$. Ни один робот не различает партнеров и не имеет средств связи с ними. В своей локальной системе координат, каждый робот может определить направление собственного вектора скорости и относительные координаты других объектов в пределах конечного диапазона видимости. Плоскость также содержит непредсказуемо движущуюся и изменяющуюся со временем кривую Жордана $\Gamma = \Gamma(t)$, неизвестную заранее. Группа роботов должна достигнуть данную кривую, и после этого отслеживать её, двигаясь в общем заранее заданном направлении вдоль неё. Также группа роботов должна достичь эффективного распределения вдоль кривой Γ , желательно, равномерного. В локальной системе координат каждый робот может определить свою *проекцию* на кривую Γ , т.е. ближайшую точку Γ , и тем самым вычислить расстояние до Γ и тангенциальную скорость относительно неё. Также каждый робот может определить, находится ли он снаружи или внутри Γ . Ниже приведены некоторые примеры возможных задач.

1. Имеется двумерный континуум $D(t) \subset \mathbb{R}^2$ произвольной и меняющейся со временем формы. Этот случай покрывает сценарии с изменяющимися твёрдыми телами, запретными зонами между транспортными средствами, движущимися в колонне, гибкими препятствиями, такими как рыболовные сети или косяки рыб, виртуальными препятствиями, как области, загрязнённые химическими веществами, или прочие изменяющиеся опасные зоны. Роботы должны приблизиться на заданное расстояние $d_0 > 0$ к $D(t)$ и поддерживать его, окружая $D(t)$ в общем направлении, тем самым создавая динамический барьер, распределяясь вокруг $D(t)$. В данном случае $\Gamma(t)$ — это множество точек, расположенное на расстоянии d_0 от $D(t)$. Способность определения ближайшей точки $\Gamma(t)$ следует из аналогичной способности по отношению к $D(t)$: первая точка получается из второй смещением на d_0 в сторону робота.

2. Имеется несколько быстрых непредсказуемо движущихся точечных целей $\mathbf{p}_j(t)$. Требуется довести среднеквадратичное расстояние d_{mean} от каждого робота до всех целей до заданного значения d_0 , чтобы эффективно распределить роботов по геометрическому месту точек $\Gamma(t)$ с $d_{\text{mean}} = d_0$, и в дальнейшем следовать за целями, поддерживая это расстояние и распределение. Способность определения ближайшей точки $\Gamma(t)$ возникает из доступа к позициям целей.

3. Как и в задаче **2**, имеется несколько движущихся точечных целей $\mathbf{p}_j(t)$. Требуется строго окружить цели, непрерывно огибая их: заданное расстояние d_0 до ближайшей в данный момент цели должно быть достигнуто каждым роботом, причём все остальные цели должны находиться внутри траектории роботов. В этом случае $\Gamma(t)$ состоит из дуг окружностей радиуса d_0 с центрами в точечных целях $\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 :$

$\min_i \|\mathbf{r} - \mathbf{p}_i(t)\| = d_0\}$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Предполагается, что цели не расходятся слишком далеко друг от друга, так что такие дуги могут быть объединены, чтобы образовать несамопересекающуюся петлю $\Gamma(t)$, охватывающую все цели. Поскольку такая кривая обычно не является гладкой, в то время как роботы могут отслеживать только гладкие кривые, $\Gamma(t)$ должна быть аппроксимирована гладкой кривой. Подробности даны в [18].

Пусть \mathbf{r}_i обозначает абсолютную позицию i -го робота. Динамика робота задаётся уравнением

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{a}_i, \quad a_i := \|\mathbf{a}_i\| \leq \bar{a}, \quad \mathbf{r}_i(0) = \mathbf{r}_i^0, \quad \mathbf{v}_i(0) = \mathbf{v}_i^0, \quad \|\mathbf{v}_i^0\| \leq \bar{v}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v}_i обозначает вектор скорости робота, его вектор ускорения \mathbf{a}_i является управляющим воздействием, а $\|\mathbf{w}\| := \sqrt{\langle \mathbf{w}; \mathbf{w} \rangle}$ и $\langle \cdot; \cdot \rangle$ обозначают евклидову норму и скалярное произведение, соответственно. Первое уравнение в (1) выполняется при условии ограничения скорости робота $v_i := \|\mathbf{v}_i\| \leq \bar{v}$. Любой предложенный закон управления обязан учитывать данное ограничение, таким образом нет необходимости обсуждать возможное нарушение данного условия.

Для описания динамики кривой $\Gamma(t)$ воспользуемся подходом Лагранжа^[28] и зададим базовую конфигурацию $\Gamma_* \subset \mathbb{R}^2$ и зависящее от времени отображение $\Phi(\cdot, t)$, переводящее Γ_* в актуальную конфигурацию $\Gamma(t) = \Phi[\Gamma_*, t]$.

Предположение 1. *Предположим, что Γ_* — C^3 -гладкая Жорданова кривая, отображение $\Phi(\cdot)$ задано на O_* — открытой связанной окрестности Γ_* , является C^3 -гладким и биективным, а его якобиан нигде не равен нулю.*

Скорость и ускорение движущейся частицы $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) \in \Gamma(t)$ обозначены как $V(\mathbf{q}, t) := \frac{\partial \Phi}{\partial t}[\mathbf{q}_*, t]$ и $A(\mathbf{q}, t) := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}[\mathbf{q}_*, t]$, соответственно, где $\mathbf{q}_* \in \Gamma_*$ — прообраз точки $\mathbf{q}(t) = \Phi(\mathbf{q}_*, t)$. Введем следующие обозначения:

- $\boldsymbol{\varrho}_i(t) := \pi[\mathbf{r}_i(t), t]$, где $\pi(\mathbf{r}, t)$ — проекция \mathbf{r} на $\Gamma(t)$ (ближайшая точка $\Gamma(t)$ к \mathbf{r});
- $d_i(t)$ — расстояние от робота i до $\Gamma(t)$ со знаком, положительным снаружи кривой и отрицательным внутри;
- \mathbf{w}^\perp — вектор \mathbf{w} , повернутый на $+\pi/2$ (против часовой стрелки);
- $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varrho}, t)$ — единичный касательный вектор к $\Gamma(t)$ в точке $\boldsymbol{\varrho} \in \Gamma(t)$, направленный против часовой стрелки;
- $\mathbf{n}(\boldsymbol{\varrho}, t) = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varrho}, t)^\perp$ — единичный вектор нормали $\Gamma(t)$;
- $W_\tau(\boldsymbol{\varrho}, t) := \langle W; \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varrho}, t) \rangle$ и $W_n(\boldsymbol{\varrho}, t) := \langle W; \mathbf{n}(\boldsymbol{\varrho}, t) \rangle$ — касательная (тангенциальная) и нормальная проекция W , соответственно;

- $\dot{\mathbf{s}}_i := \langle \dot{\boldsymbol{\rho}}_i(t); \boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{\rho}_i(t), t] \rangle$ — тангенциальная скорость проекции $\boldsymbol{\rho}_i(t)$;
- $\varkappa(\boldsymbol{\rho}, t)$ — кривизна кривой $\Gamma(t)$ (со знаком) в точке $\boldsymbol{\rho} \in \Gamma(t)$;
- $\omega(\boldsymbol{\rho}, t) := \left\langle \frac{d\boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{\rho}(t+\theta), t+\theta]}{d\theta} \Big|_{\theta=0}; \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\rho}, t) \right\rangle$ — угловая скорость, с которой Γ вращается в точке $\boldsymbol{\rho} \in \Gamma(t)$;
- $\epsilon(\boldsymbol{\rho}, t) := \frac{d\omega[\boldsymbol{\rho}(t+\theta), t+\theta]}{d\theta} \Big|_{\theta=0}$ — угловое ускорение Γ в точке $\boldsymbol{\rho} \in \Gamma(t)$ в момент времени t ;
- $\wp(\boldsymbol{\rho}, t) := \frac{d\varkappa[\boldsymbol{\rho}(t+\theta), t+\theta]}{d\theta} \Big|_{\theta=0}$ — скорость изменения кривизны в точке $\boldsymbol{\rho} \in \Gamma(t)$ в момент времени t ;
- $\sigma = \pm 1$ — заданное желаемое направление обхода кривой Γ (против часовой стрелки / по часовой стрелке).

3. Необходимые условия и предположения

Для регулирования d_i к желаемому значению 0 требуется *локальная управляемость* выхода. Как минимум, это означает, что допустимые элементы управления позволяют поддерживать определенное расстояние до Γ , приближаясь к ней и удаляясь от неё по необходимости. Так как относительная степень выхода d_i равна 2, то эти свойства подразумевают, что при $\dot{d}_i = 0$ можно произвольно управлять знаком \ddot{d}_i с помощью возможных ускорений. Предполагаем это только на максимальной скорости и всюду в *рабочей зоне*. Для удобства определим эту зону в терминах расстояния d до Γ :

$$Z_{\text{op}} := \{(\mathbf{r}, t) : d_- < d < d_+\}, \quad \text{где } d_- < 0 < d_+ \text{ даны.} \quad (2)$$

По лемме 3.1 из [19], способность поддерживать расстояние до Γ подразумевает следующие свойства (с незначительным усилением второго из них).

Предположение 2. В любой момент времени t и для любой точки $\mathbf{q} \in \Gamma(t)$ справедливо следующее неравенство:

$$0 < 1 + \kappa(\mathbf{q}, t) d_{-\text{sgn } \kappa}. \quad (3)$$

В любой момент времени расстояние от любой точки \mathbf{r} рабочей зоны (т.е., такой что $(\mathbf{r}, t) \in Z_{\text{op}}$) до кривой $\Gamma(t)$ реализуется единственной точкой данной кривой.

Второе свойство означает, что проекция $\pi(\mathbf{r}, t)$ однозначно определена в рабочей зоне.

Далее опустим аргумент (\mathbf{q}, t) в $\kappa, \omega, V_\tau, A_n$ и положим

$$\gamma_\pm(d, \mathbf{q}, t, \mathcal{V}) = \frac{\kappa(\bar{v}^2 - \mathcal{V}^2) \pm 2\omega\sqrt{\bar{v}^2 - \mathcal{V}^2} - \omega^2 d}{1 + \kappa d} - \kappa V_\tau^2 - 2\omega V_\tau + A_n. \quad (4)$$

Лемма 1. Предположим, что выполняется Предположение 2. Выход d_i локально управляем в рабочей зоне Z_{op} при движении на максимальной скорости тогда и только тогда, когда для любого момента времени t , любой точки $\mathbf{q} \in \Gamma(t)$ и любого расстояния $d \in [d_-, d_+]$ справедливы неравенства

$$|V_n| < \bar{v}, \quad |\gamma_\pm(d, \mathbf{q}, t, V_n)| < \bar{a}\sqrt{1 - V_n^2/\bar{v}^2}. \quad (5)$$

Регулирование тангенциальной $v_{i,\tau}$ и нормальной $v_{i,n}$ скорости связано с управлением расстоянием между роботами s и расстоянием d до кривой Γ , соответственно. Нормальная скорость накладывает ограничения на тангенциальную: $v_{i,\tau} \in \left[-\sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2}, \sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2} \right]$. Для того чтобы два соответствующих выхода s, d могли управляться независимо друг от друга, мы требуем, чтобы данные границы не создавали непреодолимых помех в изменении $v_{i,\tau}$: разность между $v_{i,\tau}$ и верхней и нижней

границами может быть изменена в любую сторону по средствам допустимого ускорения без ущерба d_i -управляемости при $\|\mathbf{v}_i\| < \bar{v}$. Данное требование необходимо только на кривой Γ , где расстояние между роботами становится целью регулирования. Тем временем $v_{i,n}$ и $v_{i,\tau}$ напрямую связаны с соответствующими частями $a_{i,n}$ и $a_{i,\tau}$ управляющего воздействия \mathbf{a}_i . Чтобы удерживать робота на кривой Γ , эти части должны уравнивать соответствующие части центростремительного ускорения и ускорения Кориолиса, а также собственное ускорение Γ . Таким образом распределение управляющего воздействия \bar{a} на $a_{i,n}$ и $a_{i,\tau}$ определяется скоростями и ускорениями точек Γ , чьё измерение на практике затруднительно. Это заставляет ограничить класс законов управления теми из них, что основаны на независимом от ситуации распределении управляющего воздействия. Подводя итог, обозначим рассмотренную разность как

$$g_{\pm,i} := v_{i,\tau} \pm \sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2}. \quad (6)$$

Определение 1. Говорят, что робот локально управляем на Γ с независимым от ситуации распределением управляющих воздействий, если существуют $\bar{a}_\tau, \bar{a}_n > 0$, такие что $\bar{a}_\tau^2 + \bar{a}_n^2 \leq \bar{a}^2$, и если робот находится на Γ и $v_i < \bar{v}$, то справедливо следующее:

- i) Знаками \ddot{d}_i и $\dot{g}_{\pm,i}$ можно произвольно манипулировать за счёт выбора нормального $a_i^n \in [-\bar{a}_n, \bar{a}_n]$ и тангенциального $a_i^\tau \in [-\bar{a}_\tau, \bar{a}_\tau]$ ускорения, соответственно, если другое ускорение находится в указанном интервале.

Лемма 2. Если имеется управляемость, описанная в Определении 1, тогда существует $\bar{a}_\tau, \bar{a}_n > 0$, такие что $\bar{a}_\tau^2 + \bar{a}_n^2 \leq \bar{a}^2$, (5) выполняется с $\bar{a} := \bar{a}_n, d = 0, < \mapsto \leq$, и для любого момента времени t и любой точки $\mathbf{p} \in \Gamma(t)$ справедливы неравенства

$$|\omega^2/\kappa + \kappa V_\tau^2 + 2\omega V_\tau - A_n| < \bar{a}_n \quad \text{при} \quad |\omega| < |\kappa| \sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2}, \quad (7)$$

$$2 \left[|\omega| + |\kappa| \sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2} \right] |V_n| + \bar{a}_n |V_n| (\bar{v}^2 - V_n^2)^{-1/2} \leq \bar{a}_\tau. \quad (8)$$

И наоборот, если все перечисленные неравенства верны с $\leq \mapsto <$, то имеет место указанная управляемость.

Предположим, что все условия Лемм 1 и 2 выполнены со знаком $<$, и асимптотически он не вырождается в \leq . Тогда получаем следующее.

Предположение 3. Существуют $\Delta_d, \Delta_v, \Delta_a, \Delta_a^\tau, \Delta_a^n > 0$, такие что (3) и первое и второе неравенство в (5) остаются верными, если их правые части уменьшены на $\Delta_d, \Delta_v, \Delta_a$, соответственно. Также условия Леммы 2 остаются верными, если $\bar{a}_n \mapsto \bar{a}_n - \Delta_a^n$ и $\bar{a}_\tau \mapsto \bar{a}_\tau - \Delta_a^\tau$.

Также это остаётся верным, если $\bar{v}, \bar{a}_n, \bar{a}_\tau$ и $\Delta_v, \Delta_a, \Delta_a^\tau, \Delta_a^n$ немного уменьшены. Тогда \bar{v} — допустимая скорость и $\bar{a}_\tau^2 + \bar{a}_n^2 \leq \bar{a}^2 - \Delta_2$ для некоторого $\Delta_2 > 0$.

Следующие предположения обычно выполнены в реальных условиях.

Предположение 4. *Отображение $\Phi(\cdot)$, его первая, вторая и третья производные, а также обратная матрица к матрице Якоби $\Phi'_q(\cdot)$ ограничены в области определения $O_* \times [0, \infty)$.*

Следовательно, в (2) d_{\pm} может быть выбран так, что проекция $\pi(\mathbf{r}, t)$ единственна и гладко зависит от \mathbf{r} и t в рабочей зоне Z_{op} . Следующее предположение касается диапазона видимости робота.

Предположение 5. *Существуют $d_{\text{vis}}, \Delta_{\text{vis}} > 0$, такие что если роботы i и j находятся на расстоянии $\leq d_{\text{vis}}$ до Γ и дуга A кривой Γ между их проекциями имеет длину $\leq \Delta_{\text{vis}}$, то робот i «видит» робота j и дугу A .*

Следующее предположение описывает результат заведомо реализуемого начального маневра, исполняемого каждым роботом.

Предположение 6. *В момент $t = 0$ выполняется следующее. Каждый робот 1) разогнан до максимальной скорости \bar{v} и 2) находится достаточно далеко от кривой: существует прямая линия L , такая что $\Gamma(0)$ и робот лежат по разные стороны L , и расстояние d_L от робота до L превосходит $(3\pi + 2)\bar{v}^2/\bar{a}$. Также 3) в течении первых $3\pi\bar{v}/\bar{a}$ единиц времени окружность радиуса $2\bar{v}^2/\bar{a}$ с центром в изначальной позиции робота остаётся в рабочей зоне Z_{op} , и 4) роботы предварительно расставлены достаточно далеко друг от друга: $\|\mathbf{r}_i(0) - \mathbf{r}_j(0)\| > 6\pi\bar{v}^2/\bar{a}$ для $i \neq j$.*

Реализуемость 2) обусловлена (5) (в форме, описанной в Предположении 3): двигаясь в постоянном направлении с максимальной скоростью, любой робот может отдалиться от Γ на достаточное расстояние. Различные направления движения также обеспечивают 4). Утверждение 3) фактически касается выбора d_{\pm} в определении рабочей зоны.

4. Закон управления

Представленный закон управления выполняется независимо на каждом роботе. Закон состоит из двух дискретных режимов:

$$\mathfrak{R} \text{ («достижение кривой») } \xrightarrow{|d_i| \leq d_\downarrow} \mathfrak{T} \text{ («отслеживание кривой») }, \quad (9)$$

где \mathfrak{R} является начальным. Здесь $d_\downarrow > 0$ — параметр регулятора. Цель режима \mathfrak{R} состоит в том, чтобы привести робота к кривой Γ и достичь заданного направления движения σ вдоль неё. В режиме \mathfrak{T} группа роботов должна отслеживать кривую и достичь эффективного распределения вдоль неё.

Режим \mathfrak{R} . Управляющее воздействие \mathbf{a}_i генерируется с помощью параметра $\mu > 0$ и отображения $\chi(\cdot) \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{a}_i = \sigma \bar{a} \cdot \mathbf{sgn} \{ \dot{d}_i + \mu \chi[d_i] \} \mathbf{u}_i^\perp, \quad \text{где } \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i / v_i. \quad (10)$$

Численное дифференцирование может использоваться для оценки производной по времени по замерам $d_i(t)$.

Режим \mathfrak{T} использует параметры $\bar{a}_n, \bar{a}_\tau, \kappa_b, \Delta^s > 0$. Предположение 5 означает, что если $|d_i| \leq d_{\text{viz}}$, то робот i может вычислить (в своей локальной системе координат) проекцию \mathbf{q}_j и $s_{i \rightarrow j}$ для любого робота j , такого что $|d_j| \leq d_{\text{viz}}$ и $|s_{i \rightarrow j}| \leq \Delta_{\text{viz}}$. Здесь $s_{i \rightarrow j}$ обозначает длину дуги Γ с концами в точках \mathbf{q}_i и \mathbf{q}_j со знаком, соответствующим направлению σ . Параметры d_\downarrow и Δ^s подчиняем условиям

$$0 < d_\downarrow \leq d_{\text{viz}}, \quad 0 < \Delta^s \leq \Delta_{\text{viz}}. \quad (11)$$

Определение 2. Близким соседом робота i назовем робота $j \neq i$, такого что $|d_j| < d_\downarrow$ и $|s_{i \rightarrow j}| < \Delta^s$. Такой сосед называется передним/задним, если $s_{i \rightarrow j} > 0$ / $s_{i \rightarrow j} \leq 0$.

По Предположению 5 и (11), робот i может определить всех своих близких соседей и вычислить $s_i := \min_j s_{i \rightarrow j} > 0$, где \min_j посчитан по всем близким передним соседям j , если они существуют, иначе $s_i := \Delta^s$.

Режим \mathfrak{T} . Управляющее воздействие \mathbf{a}_i задаётся, используя некоторое отображение $\Xi(\cdot) : [0, \Delta^s] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbf{a}_i = a_i^n \mathbf{e}_i - a_i^\tau \mathbf{e}_i^\perp, \quad \text{где } \mathbf{e}_i = (\mathbf{q}_i - \mathbf{r}_i) / \|\mathbf{q}_i - \mathbf{r}_i\| \mathbf{sgn} d_i, \quad (12)$$

$$a_i^n := \bar{a}_n \cdot \mathbf{sgn} [\dot{d}_i + \mu \chi(d_i)], \quad a_i^\tau := -\bar{a}_\tau \cdot \mathbf{sgn} \Sigma_i(s_i, t) - b_i^\Sigma, \quad b_i^\Sigma := \kappa_b \sum_j b(s_j), \quad (13)$$

$$\Sigma_i(s, t) := \vartheta_1 \dot{s}_i + \vartheta_2 v_{i,\tau} - \sigma \left[\vartheta_3 \sqrt{[\bar{v}^2 - v_{i,n}^2]_+} + \vartheta_4 \Xi(s) \right], \quad \vartheta_k = \vartheta_k(|d_i|/d_\downarrow). \quad (14)$$

Здесь $[b]_+ := \max\{b, 0\}$ и функции $b(\cdot), \vartheta_k(\cdot)$ выбираются с особенностями, показанными на Рис. 1, где $\delta_b > 0$, $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$. Все близкие передние соседи j робота i

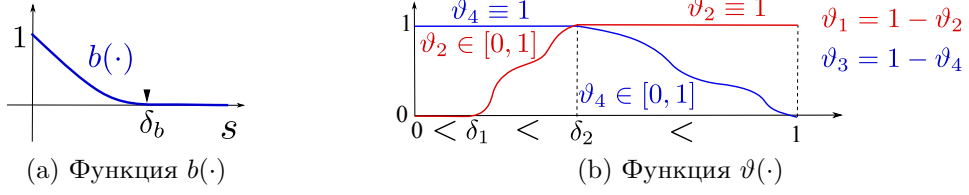


Рис. 1: Вспомогательные функции, определяемые параметрами контроллера

перенумерованы в порядке удаления \mathbf{q}_j от \mathbf{q}_i и, в случае одинакового \mathbf{q}_j , в порядке возрастания d_j . Если роботы не сталкиваются друг с другом, эти правила задают однозначную нумерацию. В (13) сумма \sum_j берётся от наименьшего индекса до первого нулевого слагаемого. Любую сумму по пустому множеству по определению считаем равной 0. Во второй формуле в (13) первое слагаемое является основной частью управляющего воздействия, второе слагаемое добавляет «тормозящее» воздействие. Идея третьей формулы в (13) состоит в том, чтобы установить «тормозящее» воздействие b_i^Σ так, что оно будет превышать аналогичное воздействие любого близкого переднего соседа j .

Доступ к тангенциальной $v_{i,\tau}$ и нормальной $v_{i,n}$ скоростям может быть следствием доступа к вектору скорости \mathbf{v}_i и формул $\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{e}_i^\perp \text{sgn } d_i$, $\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}^\perp$ (если $d_i \neq 0$) или непосредственного измерения касательной $\boldsymbol{\tau}$ к Γ при $d_i \approx 0$. Подсчёт $\dot{\mathbf{s}}_i := \langle \dot{\mathbf{q}}_i; \boldsymbol{\tau}[\mathbf{q}_i, t] \rangle$ может быть осуществлён посредством вычисления проекции \mathbf{q}_i и численного дифференцирования. Если \mathbf{q}_i и $\boldsymbol{\tau}$ вычислены в локальной системе координат F_i робота i и \cdot^l обозначает представление в F_i , тогда $\dot{\mathbf{s}}_i = \langle \dot{\mathbf{q}}_i^l; \boldsymbol{\tau}^l[\mathbf{q}_i, t] \rangle + v_{i,\tau} - \varpi_i d_i$, где ϖ_i — угловая скорость F_i . В окрестности Γ имеем $d_i \approx 0$, $\mathbf{q}_i^l \approx 0$ и, чаще всего, $\dot{\mathbf{q}}_i^l \approx 0$. Тогда $\dot{\mathbf{s}}_i \approx v_{i,\tau}$ и в (14) сумма первых двух слагаемых $\approx v_{i,\tau}$.

Для указанного выше разрывного закона управления решения замкнутой системы понимаются в смысле Филиппова^[5]. Поскольку этот закон генерирует ограниченное управляющее воздействие \mathbf{a}_i , состояние $\mathbf{x} = \{(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)\}_{i=1}^N$ группы роботов описывается ОДУ $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$, где $\|f(\mathbf{x}, t)\| \leq k(1 + \|\mathbf{x}\|) \forall \mathbf{x}, t$ для некоторого $k > 0$. Поэтому для любого начального состояния решение определено для всех $t \geq 0$ ^[5].

5. Основные результаты

Теорема 1. Пусть выполнены Предположения 1–6. Тогда закон управления из Раздела 4 может быть настроен так, что верны следующие утверждения:

- i) Все роботы соблюдают ограничения скорости и ускорения: $v_i \leq \bar{v}, a_i \leq \bar{a}$ для всех i в любой момент времени;
- ii) Не происходит столкновений между роботами;
- iii) Каждый робот достигает целевую кривую: $d_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всех i ;
- iv) Со временем проекции \mathbf{q}_i различных роботов на Γ отличны друг от друга, перемещаются по Γ в указанном направлении $\sigma v_{i,\tau}(t) > 0$ и соблюдают определённый порядок: после подходящей перенумерации роботов от 0 до $N - 1$, проекция $\mathbf{q}_{i \oplus 1}(t)$ (где \oplus — сложение по модулю N) является непосредственным предшественником $\mathbf{q}_i(t)$ в направлении σ ;
- v) Пусть кривая Γ неподвижна и область видимости каждого робота непуста при любом их равномерном распределении по кривой: $\Delta_{vis} > P/N$. Здесь Δ_{vis} взята из Предположения 5, P — периметр Γ и N — число роботов. Также пусть $\Delta^s > P/N$ в (11). Тогда роботы асимптотически достигают равномерного распределения вдоль кривой, т.е., $s_{i \rightarrow i \oplus 1} \rightarrow P/N$ при $t \rightarrow \infty$, и перемещаются по ней со скоростью, стремящейся к $\Xi(P/N)$ при $t \rightarrow \infty$.

Утверждение iv) означает, что роботы не сбиваются в плотные группы. Поскольку P/N — расстояние между двумя соседними точками равномерного распределения вдоль Γ , нарушение условия $\Delta_{vis} > P/N$ из v) означает, что, находясь близко к равномерному распределению, роботы теряют обратную связь, поскольку не видят друг друга. Это делает задачу равномерного распределения едва ли выполнимой.

Далее обсудим настройку закона управления.

Функция $\chi(\cdot)$ должна быть гладкой и такой, что

$$z\chi(z) > 0 \quad \forall z \neq 0, \quad \bar{\chi} := \sup_{z \in \mathbb{R}} |\chi(z)| < \infty, \quad \bar{\chi}' := \sup_{z \in \mathbb{R}} |\chi'(z \pm)| < \infty. \quad (15)$$

Например, $\chi(z) = a\chi_*(z/b)$, где $a, b > 0$ и $\chi_*(z) = \arctan(z), \tanh(z), \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$.

Значения d_\downarrow из (9) и Δ^s из Определения 2 должны быть такими, что выполняется (11) и

$$d_\downarrow < d_L - (3\pi + 2)\bar{v}^2/\bar{a}, \quad \min\{|d_-|, d_+\}, \quad \frac{\Delta_d \Delta_a^n}{2(\bar{\omega} + \bar{\kappa}\bar{v})^2}, \quad \frac{1}{\bar{\kappa}}, \quad (16)$$

$$\left[\frac{(\bar{\omega} + \bar{\kappa}\bar{v})\bar{\kappa}'(\bar{v} + \bar{\omega}d_\downarrow)d_\downarrow}{(1 - \bar{\kappa}d_\downarrow)^3} + \frac{\bar{\epsilon}}{1 - \bar{\kappa}d_\downarrow} + \frac{(\bar{\rho} + \bar{\omega}'_{\mathbf{e}} + \bar{v}\bar{\kappa}'_{\mathbf{e}})(\bar{v} + \bar{\omega}d_\downarrow)}{(1 - \bar{\kappa}d_\downarrow)^2} \right] \delta_2 d_\downarrow < \frac{\Delta_a^\tau}{6}, \quad (17)$$

$$\frac{\bar{\omega} + \bar{\kappa}\bar{v}}{1 - \bar{\kappa}d_{\downarrow}} \delta_2 d_{\downarrow} < \frac{1}{2} \sqrt{\bar{v}\Delta_v - \Delta_v^2/4},$$

$$\frac{\bar{\kappa}d_{\downarrow}}{1 - \bar{\kappa}d_{\downarrow}} \left\{ \bar{a} + 2 \frac{(\bar{\omega} + \bar{\kappa}\bar{v})\bar{v}}{1 - \bar{\kappa}d_{\downarrow}} \right\} \left[1 + \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{v}\Delta_v - \Delta_v^2/4}} \right] < \frac{\Delta_a^{\tau}}{6}. \quad (18)$$

Здесь d_L и d_{\pm} взяты из 2) в Предположении 6 и (2), соответственно, $\Delta_d, \Delta_v, \Delta_a^{\tau}, \Delta_a^n > 0$ — константы из Предположения 3, а также используются следующие константы и оценки:

$$|q(\boldsymbol{\varrho}, t)| \leq \bar{q} \quad \forall \boldsymbol{\varrho} \in \Gamma(t), \forall t \text{ для } q = \kappa, \omega, \kappa'_{\boldsymbol{\varrho}}, \omega'_{\boldsymbol{\varrho}}, \epsilon, \wp; \quad 0 < \underline{p} \leq P(t) \leq \bar{p} \quad \forall t. \quad (19)$$

Здесь $\cdot_{\boldsymbol{\varrho}}$ обозначает производную по направлению касательной, и $P(t)$ — периметр $\Gamma(t)$. В (19) конечные границы действительно существуют благодаря Предположению 4. Все неравенства (16)–(18) достигаются выбором d_{\downarrow} достаточно малым, поскольку их правые части положительны по 2) в Предположении 6.

Функция $\Xi(s)$, где $s \in [0, \Delta^s]$, гладка и такая, что

$$\Xi(0) \geq 0, \quad \Xi' := \min_{s \in [0, \Delta^s]} \Xi'(s) > 0, \quad \Xi := \max_{s \in [0, \Delta^s]} \Xi(s) < \frac{1}{2} \sqrt{\bar{v}\Delta_v - \Delta_v^2/4}, \quad (20)$$

$$\Xi' := \max_{s \in [0, \Delta^s]} \Xi'(s) < \frac{\Delta_a^{\tau}(1 - \bar{\kappa}d_{\downarrow})}{6[2(\bar{v} + \bar{\omega}d_{\downarrow}) + (1 - \bar{\kappa}d_{\downarrow})\bar{p}\bar{\kappa}\bar{v}]}. \quad (21)$$

Например, это может быть медленно возрастающая линейная функция с достаточно малым значением угла наклона графика.

Параметр μ выбирается, используя $\bar{\chi}$ из (15), и достаточно малым, чтобы выполнялись неравенства:

$$2\mu\bar{\chi} \leq \Delta_v, \quad \frac{\bar{a}\sqrt{2\mu\bar{\chi}}}{\sqrt{\bar{v}}} + 2 \frac{\bar{\kappa}\bar{v}\bar{\chi}\mu + \bar{\omega}\sqrt{2\bar{v}\bar{\chi}\mu}}{\Delta_d} + \mu^2\bar{\chi}\bar{\chi}' < \Delta_a, \quad (22)$$

$$\frac{(\bar{v} + \Xi)\bar{\vartheta}'_3}{d_{\downarrow}} + \frac{\bar{v}^3[\bar{a}_n + (\bar{\omega} + \bar{\kappa}\bar{v})\bar{v}]}{(\bar{v}\Delta_v - \Delta_v^2/4)^{3/2}} + \frac{(\bar{\vartheta}'_1 + 2)(\bar{\omega} + \bar{\kappa}\bar{v})}{(1 - \bar{\kappa}d_{\downarrow})^2} + \left[\bar{\kappa} + \frac{(\bar{\omega} + 2\bar{\kappa}\bar{v})}{\sqrt{\bar{v}\Delta_v - \Delta_v^2/4}} \right] \frac{\bar{v}^2}{\sqrt{\bar{v}\Delta_v - \Delta_v^2/4}} < \frac{\Delta_a^{\tau}}{6\mu\bar{\chi}}. \quad (23)$$

Здесь $\bar{\vartheta}_k$ — верхняя граница модуля производной функции $\vartheta_k(\cdot)$ из Рис. 1b.

Параметр δ_b из Рис. 1a выбирается, используя \underline{p} из (19), и достаточно малым, что выполнялись неравенства:

$$\delta_b < \Delta^s/N, \quad \underline{p}/N. \quad (24)$$

Параметр \varkappa_b из (13) выбирается, используя Δ_2 из Предположения 3, и достаточно малым, чтобы выполнялись неравенства:

$$0 < \varkappa_b < \Delta_a^r/(6N), \quad 2\bar{a}N\varkappa_b + N^2\varkappa_b^2 < \Delta_2. \quad (25)$$

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения Теоремы 1 и параметры закона управления выбраны в соответствии с указанными рекомендациями. Тогда утверждения i)—iv) Теоремы 1 верны. Дополнительно, если выполнены предположения из утверждения v) Теоремы 1 и $\Delta^s := \Delta_{vis}$, то утверждение v) также верно.*

Приведенные выше рекомендации по выбору параметров регулятора могут быть использованы для экспериментальной настройки регулятора. Если оценки задействованных величин (как $\overline{\mathcal{X}}$, \overline{p} , и т.д.) доступны, то эти рекомендации можно использовать для аналитической настройки.

6. Доказательства

6.1. Вспомогательные утверждения

Из-за природы цели управления кинематические и другие характеристики движущейся и деформируемой кривой играют ключевую роль в математически строгом обосновании алгоритма. Эта кривая представляет собой динамический континуум. До сих пор такие континуумы в основном изучались в рамках механики сплошных сред^[1,28]. Тем не менее, эта дисциплина в основном сосредоточена на механическом поведении материалов, моделируемых как непрерывная масса, не слишком связана с навигацией роботов относительно континуумов и поэтому не предлагает многих формул, необходимых для исследований в области робототехники. Этот пробел частично восполнен в [15].

Для удобства в этом разделе воспроизводятся основные формулы из [15]. Аргументы отображений могут быть отброшены, если они ясны из контекста. Введём следующие обозначения:

- $\mathbf{q}_\Gamma(\theta|t, \mathbf{q})$ — позиция точки $\mathbf{q} \in \Gamma(t)$ в момент времени θ ;
- $L_t(\mathbf{q}' \rightarrow \mathbf{q}'')$ — длина дуги кривой $\Gamma(t)$ от $\mathbf{q}' \in \Gamma(t)$ до $\mathbf{q}'' \in \Gamma(t)$ со знаком, соответствующим направлению против часовой стрелки;
- $\varsigma(\mathbf{q}, t) := \lim_{\theta \rightarrow t, \delta \rightarrow 0} \frac{L_\theta[\mathbf{q}_\Gamma(\theta|t, \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{q}_\Gamma(\theta|t, \mathbf{q}_\delta)] - \delta}{(\theta - t)\delta}$ — скорость растяжения Γ в точке $\mathbf{q} \in \Gamma(t)$; здесь $\mathbf{q}_\delta \in \Gamma(t)$ определяется с помощью $L_t(\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_\delta) = \delta$.

Первая лемма объединяет Теорему 2.2 и первое утверждение Теоремы 2.4 из [15].

Лемма А1. *Следующие равенства выполнены для любого робота i , любого момента времени t , и любой точки $\mathbf{q} \in \Gamma(t)$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i(t + dt) - \pi[\mathbf{q}_i, t + dt] &= \dot{\mathbf{s}}_i \boldsymbol{\tau} dt + \mathcal{O}(dt), \quad \langle \dot{\mathbf{q}}_i; \mathbf{n} \rangle = V_n, \\ \frac{d\boldsymbol{\tau}[\mathbf{q}_i(t), t]}{dt} &= (\omega + \kappa \dot{\mathbf{s}}_i) \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}[\mathbf{q}_i(t), t]}{dt} = -(\omega + \kappa \dot{\mathbf{s}}_i) \boldsymbol{\tau}; \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

$$\pi(\mathbf{q}, \theta) = \mathbf{q} + V_n(\mathbf{q}, t) \mathbf{n}(\mathbf{q}, t)(\theta - t) + \mathcal{O}(\theta - t); \quad (\text{A2})$$

$$\varsigma(\mathbf{q}, t) = \langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}, t); V'_\mathbf{q}(\mathbf{q}, t) \rangle, \quad \omega(\mathbf{q}, t) = \langle \mathbf{n}(\mathbf{q}, t); V'_\mathbf{q}(\mathbf{q}, t) \rangle - \kappa(\mathbf{q}, t) V_\tau(\mathbf{q}, t); \quad (\text{A3})$$

$$\dot{V}_n := \frac{dV_n[\mathbf{q}_i(t), t]}{dt} = \dot{\mathbf{s}}_i \omega - \kappa V_\tau^2 - 2\omega V_\tau + A_n; \quad (\text{A4})$$

$$\left\| \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t + dt) \right\| - 1 = -\kappa(\mathbf{q}, t) V_n(\mathbf{q}, t) dt + \mathcal{O}(dt);$$

$$\kappa[\pi(\mathbf{q}, t + dt), t + dt] = \kappa(\mathbf{q}, t) + (\omega'_\rho + \kappa^2 V_n) dt + \mathcal{O}(dt); \quad (\text{A5})$$

$$V_n[\pi(\mathbf{q}, t + dt), t + dt] = V_n[\mathbf{q}, t] - (2\omega V_\tau - A_n + \kappa V_\tau^2) dt + \mathcal{O}(dt); \quad (\text{A6})$$

$$\sigma \dot{\mathbf{s}}_{i \rightarrow j}(t) = \dot{\mathbf{s}}_j(t) - \dot{\mathbf{s}}_i(t) - \oint_{\mathbf{q}_i(t)}^{\mathbf{q}_j(t)} \kappa(\mathbf{q}, t) V_n(\mathbf{q}, t) ds; \quad (\text{A7})$$

где s — длина дуги и $\oint \dots ds$ — интеграл вдоль кривой $\Gamma(t)$.

Следующая лемма объединяет Теорему 2.3 и второе утверждение Теоремы 2.4 из [15].

Лемма A2. Для $v_{i,\tau} = \langle \mathbf{v}_i; \boldsymbol{\tau} \rangle$, $v_{i,n} = \langle \mathbf{v}_i; \mathbf{n} \rangle$ и любого робота i справедливы следующие равенства:

$$\dot{d}_i = V_n - v_{i,n}, \quad \dot{\mathbf{s}}_i = \frac{v_{i,\tau} - \omega d_i}{1 + \kappa d_i} = v_{i,\tau} - \frac{\omega + \kappa v_{i,\tau}}{1 + \kappa d_i} d_i, \quad \omega + \kappa \dot{\mathbf{s}}_i = \frac{\omega + \kappa v_{i,\tau}}{1 + \kappa d_i}; \quad (\text{A8})$$

$$\mathbf{v}_i = [V_n - \dot{d}_i] \mathbf{n} + [\dot{\mathbf{s}}_i(1 + \kappa d_i) + \omega d_i] \boldsymbol{\tau}, \quad (\text{A9})$$

$$\ddot{d}_i = \frac{\kappa v_{i,\tau}^2 + 2v_{i,\tau}\omega - \omega^2 d_i}{1 + \kappa d_i} - \kappa V_\tau^2 - 2\omega V_\tau + A_n - a_{i,n};$$

$$\dot{v}_{i,\tau} = a_{i,\tau} + \frac{\omega + \kappa v_{i,\tau}}{1 + \kappa d_i} v_{i,n} = a_{i,\tau} + (\omega + \kappa \dot{\mathbf{s}}_i) v_{i,n}, \quad (\text{A10})$$

$$\dot{v}_{i,n} = a_{i,n} - \frac{\omega + \kappa v_{i,\tau}}{1 + \kappa d_i} v_{i,\tau} = a_{i,n} - (\omega + \kappa \dot{\mathbf{s}}_i) v_{i,\tau};$$

$$\sigma \ddot{s}_{i \rightarrow j}(t) = a_{j,\tau} - a_{i,\tau} + \lambda_j - \lambda_i - \oint_{\mathcal{Q}_i}^{\mathcal{Q}_j} (\omega'_\rho V_n - 2\omega \kappa V_\tau + \kappa A_n - \kappa^2 V_\tau^2) ds; \quad (\text{A11})$$

$$\lambda_k := \omega V_n - \frac{2\dot{d}_k[\omega + \kappa \dot{\mathbf{s}}_k] + [\dot{\omega} + \dot{\kappa} \dot{\mathbf{s}}_k + \kappa a_{k,\tau} + (\dot{\mathbf{s}}_k \kappa + \omega) \kappa V_n] d_k}{1 + \kappa d_k}, \quad (\text{A12})$$

$$\dot{\omega} = \omega'_\rho \dot{\mathbf{s}}_i + \epsilon, \quad \dot{\kappa} = \kappa'_\rho \dot{\mathbf{s}}_i + \wp.$$

6.2. Доказательство лемм из раздела 3

Доказательство Леммы 1: По (A9) и (A8), $\dot{d}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_i = V_n \mathbf{n} + v_{i,\tau} \boldsymbol{\tau}$. Поскольку $\|\mathbf{v}_i\| = \bar{v}$, первое неравенство в (5) выполняется с $\leq \mapsto <$ и $v_{i,\tau} = \mathbf{sgn} v_{i,\tau} \sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2}$. По (4) и (A9), $\ddot{d}_i = \mathcal{A} - a_{i,n}$, где $\mathcal{A} := \gamma_{\mathbf{sgn} v_{i,\tau}}(d_i, \mathcal{Q}_i, t, V_n)$. Тем временем, $\|\mathbf{a}_i\| \leq \bar{a}$ и $v \equiv \bar{v} \Rightarrow \langle \mathbf{a}_i; \mathbf{v}_i \rangle \equiv 0$. Тогда $a_{i,n}$ может быть изменен в пределах $[-\alpha, \alpha]$, где $\alpha = |v_\tau| \bar{a} / \bar{v} = \bar{a} \sqrt{1 - V_n^2 / \bar{v}^2}$. Следовательно, способность свободно управлять знаком \ddot{d}_i имеет место тогда и только тогда, когда $|\mathcal{A}| < \alpha$. Из этого следует (5). \square

Доказательство Леммы 2: Нахождение на кривой Γ означает, что $d_i = 0, \dot{d}_i = 0$. Таким образом, по (A9), $v_{i,n} = V_n$, $|V_n| \leq v_i$, $v_{i,\tau} = \mathbf{sgn} v_{i,\tau} \sqrt{v_i^2 - V_n^2}$, и

$$\dot{g}_{\pm,i} \stackrel{(6)}{=} \dot{v}_{i,\tau} \mp \frac{\dot{v}_{i,n} v_{i,n}}{\sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2}} \stackrel{(A10)}{=} a_{i,\tau} + (\omega + \kappa v_{i,\tau}) V_n \mp \frac{V_n}{\sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2}} [a_{i,n} - (\omega + \kappa v_{i,\tau}) v_{i,\tau}].$$

По (A9), способность, описанная в пункте i) Определения 1, возможна тогда и только тогда, когда для всех $\zeta \in [0, \sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2})$ справедливы неравенства

$$|\kappa \zeta^2 \pm 2\omega \zeta - \kappa V_\tau^2 - 2\omega V_\tau + A_n| < \bar{a}_n, \quad (|\omega| + |\kappa| \zeta) |V_n| + \frac{|V_n|}{\sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2}} [\bar{a}_n + (|\omega| + |\kappa| \zeta) \zeta] < \bar{a}_\tau. \quad (\text{B1})$$

Первое отношение выполняется на рассматриваемом интервале для ζ тогда и только тогда, когда оно выполняется ($c \mapsto \leq$) на его правом конце и в вершине параболы $\zeta_v = \mp\omega/\varkappa$, если ζ_v соответствует интервалу $|\omega| < |\varkappa|\sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2}$. Здесь первое и второе условие аналогичны (5) с $\bar{a} := \bar{a}_n, d = 0, \mapsto \leq$ и (7), соответственно. Поскольку левая часть второго неравенства в (B1) возрастает с увеличением $\zeta \geq 0$, это соотношение выполнено тогда и только тогда, когда его левая часть не превосходит \bar{a}_τ для $\zeta = \sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2}$. Таким образом получаем (8). \square

6.3. Доказательство теорем 1 и 2: Поведение в режиме \mathfrak{R}

В данном разделе мы принимаем предположения Теоремы 2 и, за исключением Леммы C3, рассматриваем конкретного робота, поэтому опускаем индекс i . Также положим $S := \dot{d} + \mu\chi(d)$ и рассмотрим поверхность \mathcal{S} в фазовом пространстве переменных $\mathbf{r}, \mathbf{v}, t$ заданную $S = 0$ и $(\mathbf{r}, t) \in Z_{\text{op}}$.

Лемма C1. 1) Тангенциальная скорость v_τ не равна нулю на части $\mathcal{S}_{\bar{v}} \subset \mathcal{S}$, где $v = \bar{v}$. 2) В режиме \mathfrak{R} , \mathcal{S} — поверхность скольжения (двусторонне отталкивающая поверхность) в любой точке $\mathcal{S}_{\bar{v}}$, где $\sigma v_\tau > 0$ (соответственно, $\sigma v_\tau < 0$).

Доказательство. Будем использовать следующие условия для скользящего и отталкивающего режимов^[5]:

$$\lim_{S \neq 0, S \rightarrow 0} \dot{S} \operatorname{sgn} S < 0 \Rightarrow \text{скольжение}, \quad \lim_{S \neq 0, S \rightarrow 0} \dot{S} \operatorname{sgn} S > 0 \Rightarrow \text{отталкивание}. \quad (\text{C1})$$

Принимая во внимание Предположение 3, (15) и (A9), видим, что при $v = \bar{v}$

$$S = 0 \Rightarrow |v_n - V_n| = |\langle \mathbf{v}; \mathbf{n} \rangle - V_n| = |\dot{d}| = \mu|\chi| \leq \mu\bar{\chi},$$

$$|v_n^2 - V_n^2| \leq 2\bar{v}\mu\bar{\chi}, \quad \left| \sqrt{\bar{v}^2 - v_n^2} - \sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2} \right| \leq \sqrt{2\bar{v}\mu\bar{\chi}}, \quad (\text{C2})$$

$$\Rightarrow |v_\tau|^2 = \bar{v}^2 - v_n^2 \geq \bar{v}^2 - (|V_n| + \mu\bar{\chi})^2 \geq \bar{v}^2 - (\bar{v} - \Delta_v + \mu\bar{\chi})^2$$

$$\stackrel{(22)}{\geq} \bar{v}^2 - (\bar{v} - \Delta_v/2)^2 = \bar{v}\Delta_v - \Delta_v^2/4 > 0 \Rightarrow 1); \quad (\text{C3})$$

$$|\gamma_\pm(d, \boldsymbol{\varrho}, t, v_n) - \gamma_\pm(d, \boldsymbol{\varrho}, t, V_n)| \stackrel{(4)}{\leq} \frac{|\varkappa||v_n^2 - V_n^2| + 2|\omega| \left| \sqrt{\bar{v}^2 - v_n^2} - \sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2} \right|}{1 + \varkappa d}$$

$$\stackrel{\text{Предп. 3, (19), (C2)}}{\leq} \frac{2\bar{\varkappa}\bar{v}\bar{\chi}\mu + 2\bar{\omega}\sqrt{2\bar{v}\bar{\chi}\mu}}{\Delta_d},$$

$$\mathbf{u} \stackrel{(10)}{=} \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| = v_n/\bar{v} \mathbf{n} + \sigma_\tau \sqrt{1 - v_n^2/\bar{v}^2} \boldsymbol{\tau}, \quad \text{где } \sigma_\tau := \operatorname{sgn} v_\tau,$$

$$\mathbf{u}^\perp = -v_n/\bar{v} \boldsymbol{\tau} + \sigma_\tau \sqrt{1 - v_n^2/\bar{v}^2} \mathbf{n},$$

$$\dot{S} \stackrel{(4), (10), (A9)}{=} -\sigma\sigma_\tau \operatorname{sgn} S \left[\bar{a} \sqrt{1 - V_n^2/\bar{v}^2} + \sigma\sigma_\tau \operatorname{sgn} S \gamma_{\sigma_\tau}(d, \boldsymbol{\varrho}, t, V_n) - \theta \right], \quad (\text{C4})$$

$$\text{где } \theta := -\frac{\bar{a}}{\bar{v}}\sqrt{\bar{v}^2 - v_n^2} + \frac{\bar{a}}{\bar{v}}\sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2} + \sigma\sigma_\tau \mathbf{sgn} S \left[\gamma_{\sigma_\tau}(d, \boldsymbol{\varrho}, t, v_n) - \gamma_{\sigma_\tau}(d, \boldsymbol{\varrho}, t, V_n) + \mu\chi' \dot{d} \right],$$

$$|\theta| \stackrel{(15), (C2)}{\leq} q := \frac{\bar{a}\sqrt{2\mu\bar{\chi}}}{\sqrt{\bar{v}}} + 2 \frac{\bar{\kappa}\bar{v}\bar{\chi}\mu + \bar{\omega}\sqrt{2\bar{v}\bar{\chi}\mu}}{\Delta_d} + \mu^2\bar{\chi}\bar{\chi}'.$$

Используя Предположение 3, видим, что в (C4) выражение в [...] не меньше чем $\Delta_a - q > 0$ по (22). Следовательно, знак предела из (C1) равен $-\sigma\sigma_\tau$. Это и (C1) заканчивают доказательство. \square

Лемма C2. В режиме \mathfrak{R} скорость $v \equiv \bar{v}$ и в течении временного интервала $[0, T := 3\pi\bar{v}/\bar{a}]$ робот остаётся в рабочей зоне Z_{op} и достигает позицию, где $S = \dot{d} + \mu\chi(d) = 0, \sigma v_\tau > 0$.

Доказательство. По (10) и 1) из Предположения 6, $v \equiv \bar{v}$ и робот перемещается по окружности C с радиусом $R = \bar{v}^2/\bar{a}$, следовательно, по 3) из Предположения 6, находится в Z_{op} пока $t \leq T$ или \mathfrak{R} не сменится режимом \mathfrak{T} . Таким образом, остается доказать последнее утверждение леммы, предполагая, что оно неверно для $t = 0$. Тогда $S \neq 0$ для $t > 0, t \approx 0$ по Лемме C1 и 1) в Предположении 6. Пусть t_0 будет первым моментом времени t , когда или а) $S = 0$, или б) $t = T$, или в) режим \mathfrak{R} сменится режимом \mathfrak{T} . Достаточно показать, что событие а) наступит в момент $t = t_0$. Для этого перенесём линию L из 2) в Предположении 6 в направлении $\mathbf{r}(0)$ на $3\pi\bar{v}^2/\bar{a}$. Поскольку скорость любой точки Γ не превышает \bar{v} по (5), для $t \in [0, t_0]$, д) $\Gamma(t)$ и C остаются разделены линией L и е) расстояние от робота до Γ превышает d_\downarrow по (16). Следовательно, в) не выполнено по (9) и е). Предположим, что $t_0 = T$. Тогда по д), полярный угол вектора $\mathbf{r}(t) - \boldsymbol{\varrho}(t)$ непрерывно растёт на интервале, длина которого не превосходит π . Тем временем, полярный угол вектора скорости $\mathbf{v}(t)$ непрерывно проходит через интервал длины 3π . Следовательно, существует два момента времени $t_i \in [0, T], i = 1, 2$, такие что $\mathbf{v}(t_i)$ и $(-1)^i[\boldsymbol{\varrho}(t_i) - \mathbf{r}(t_i)] \mathbf{sgn} d(t_i)$ коллинеарны и сонаправлены. Поскольку $\boldsymbol{\varrho}(t_i) - \mathbf{r}(t_i)$ и $\mathbf{n}[\boldsymbol{\varrho}(t_i), t_i] \mathbf{sgn} d(t_i)$ коллинеарны и сонаправлены, имеем $(-1)^{i+1}S(t_i) \stackrel{(A9)}{=} (-1)^{i+1}V_n(t_i) + (-1)^i \langle \mathbf{v}(t_i); \mathbf{n}[\boldsymbol{\varrho}(t_i), t_i] \rangle + (-1)^{i+1}\mu\chi = \bar{v} - (-1)^i[V_n(t_i) + \mu\chi] \stackrel{(15)}{\geq} \bar{v} - |V_n| - \mu\bar{\chi} \stackrel{\text{Предп. 3}}{\geq} \Delta_v - \mu\bar{\chi} \stackrel{(22)}{>} 0$. Таким образом, непрерывная функция времени S принимает значения противоположных знаков в моменты $t = t_1, t_2$. Отсюда следует, что S неизбежно достигает нуля в промежутке $(0, t_0)$, что противоречит определению t_0 . Значит, $t_0 \neq T$ и а) выполнено. \square

По Лемме C1 скользящее движение по поверхности \mathcal{S} начинается в момент $t = t_0$ и продолжается до тех пор, пока робот остаётся в рабочей зоне Z_{op} или работает режим \mathfrak{R} . Во время этого движения $\dot{d} = -\mu\chi(d)$, значит, d монотонно убывает к 0 по (15). Это и (2) гарантируют, что робот не может покинуть Z_{op} во время скользящего движения. В результате, приходим к следующему.

Следствие С1. Режим \mathfrak{R} заканчивается, когда робот находится в скользящем движении по поверхности \mathcal{S} с $\sigma v_\tau > 0$ и $v \equiv \bar{v}$ в пределах Z_{op} и приближается на расстояние d_\downarrow к Γ .

Лемма С3. Пока два робота $i \neq j$ находятся в режиме \mathfrak{R} , они не сталкиваются.

Доказательство. До момента времени $T = 3\pi\bar{v}/\bar{a}$ каждый из них проходит расстояние $\leq \bar{v}T = 3\pi\bar{v}^2/\bar{a}$, поэтому столкновения отсутствуют благодаря 4) в Предположении 6. Для $t \geq T$ и $k = i, j$, $\dot{d}_k = -\mu\chi(d_k)$, $v_k = \bar{v}$ и $\sigma v_{k,\tau} > 0$ по Леммам С1 и С2. Следовательно, $d_i(T) \neq d_j(T) \Rightarrow d_i(t) \neq d_j(t)$ для $t \geq T$, что исключает столкновения. Если $d_i(T) = d_j(T)$, то $d_i(t) = d_j(t) =: d(t)$ для $t \geq T$. Тогда (А9) даёт, что $v_{k,n} = V_n - \dot{d}$, $v_{k,\tau} = \sigma\sqrt{\bar{v}^2 - (V_n - \dot{d})^2}$,

$$\dot{\mathbf{r}}_k \stackrel{(A8)}{=} [V_n(\mathbf{q}_k, t) - \dot{d}(t)]\mathbf{n}(\mathbf{q}_k, t) + \sigma\sqrt{\bar{v}^2 - [V_n(\mathbf{q}_k, t) - \dot{d}(t)]^2}\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}_k, t).$$

Таким образом, $\mathbf{r}_i(t)$ и $\mathbf{r}_j(t)$ решают ОДУ, где $\mathbf{r}_i(T) \neq \mathbf{r}_j(T)$. Следовательно, $\mathbf{r}_i(t) \neq \mathbf{r}_j(t)$ для $t \geq T$. \square

Следствие С2. Если два робота достигают порога переключения d_\downarrow одновременно, они начинают режим \mathfrak{T} с различных позиций с различными проекциями \mathbf{q} на Γ .

6.4. Доказательство утверждений i)–iv) теорем 1 и 2

Предположения Теоремы 2 считаем выполненными. Положим $\sigma = 1$ и продолжим функцию $\Xi(\cdot)$ из (14) на \mathbb{R} : $\Xi(s) := \Xi(0) \forall s < 0$ и $\Xi(s) := \Xi(\Delta^s)$ для $s > \Delta^s$, а также $S_i := \dot{d}_i + \mu\chi(d_i)$ и $\mathcal{S}_i := \{(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) : S_i = 0\}$.

Лемма D1. $\mathcal{S}_{\downarrow,i} \subset \mathcal{S}_i$, где $v_i \leq \bar{v}$ и $|d_i| \leq d_\downarrow$, является поверхностью скольжения.

Доказательство. Пусть точка фазового пространства робота i приближается к определённой точке в $\mathcal{S}_{\downarrow,i}$ так что $S_i \neq 0$ и $\text{sgn } S_i$ не меняется. Благодаря (13) и (А9) и по аналогии с доказательством Леммы С1 имеем

$$\begin{aligned} \lim \dot{S}_i \text{sgn}(S_i) &= -\bar{a}_n + \text{sgn}(S_i)[\beta(v_{i,\tau}, d_i) - \mu^2\chi'\chi], \\ \text{где } \beta(\zeta, d) &:= \frac{\kappa\zeta^2 + 2\zeta\omega - \omega^2d}{1 + \kappa d} - \kappa V_\tau^2 - 2\omega V_\tau + A_n, \quad (D1) \\ |\beta(v_{i,\tau}, d_i) - \beta(v_{i,\tau}, 0)| &= |d_i|(\omega + \kappa v_{i,\tau})^2(1 + \kappa d_i)^{-1} \stackrel{\text{Предп. 3, (19)}}{\leq} d_\downarrow(\bar{\omega} + \bar{\kappa}\bar{v})^2/\Delta_d, \\ |v_{i,\tau}| &= \sqrt{v_i^2 - v_{i,n}^2} \stackrel{(A9)}{\leq} \sqrt{\bar{v}^2 - (V_n - \dot{d})^2} \leq \sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2 + |V_n|\mu\bar{\chi}(\bar{v}^2 - V_n^2)^{-1/2}}, \\ |\beta(v_{i,\tau}, 0)| &\stackrel{(19)}{\leq} \max_{0 \leq \zeta \leq \sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2}} |\beta(\zeta, 0)| + 2|V_n|\mu\bar{\chi} \left[\left(1 + \frac{|V_n|\mu\bar{\chi}}{\bar{v}^2 - V_n^2}\right) \bar{\kappa} + \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2}} \right] \\ &\stackrel{\text{Предп. 3}}{\leq} \max_{0 \leq \zeta \leq \sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2}} |\beta(\zeta, 0)| + 2\bar{v}\mu\bar{\chi} \left[\left(1 + \frac{\bar{v}\mu\bar{\chi}}{\Delta_v^2}\right) \bar{\kappa} + \frac{\bar{\omega}}{\Delta_v} \right]. \end{aligned}$$

Используя Предположение 3 и отношение между условиями Леммы 2 и (B1) (полученное при доказательстве Леммы 2), видим, что последний максимум $\leq \bar{a}_n - \Delta_a^n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\beta(v_{i,\tau}, d_i) - \mu^2 \chi' \chi| &\stackrel{(15)}{\leq} \bar{a}_n - \Delta_a^n + \frac{d_\downarrow}{\Delta_d} (\bar{\omega} + \bar{\kappa} v)^2 \\ &\quad + 2\bar{v} \mu \bar{\chi} \left[\left(1 + \frac{\bar{v} \mu \bar{\chi}}{\Delta_v^2} \right) \bar{\kappa} + \frac{\bar{\omega}}{\Delta_v} \right] + \mu^2 \bar{\chi} \chi' \stackrel{(16), (22)}{\leq} \bar{a}_n. \end{aligned}$$

Значит (D1) влечет первую формулу из (C1), что завершает доказательство. \square

Замечание D1. Из соображений непрерывности, приведенное доказательство показывает, что $S_i \neq 0 \Rightarrow \mathbf{sgn} S_i \cdot \dot{S}_i < 0$, если робот находится в области $\mathcal{S}_{\downarrow,i}^{\delta_\Sigma}$, заданной $|S_i| < \delta_\Sigma$, $v_i < \bar{v} + \delta_\Sigma$, $|d_i| < d_\downarrow + \delta_\Sigma$, и $\delta_\Sigma > 0$ достаточно мало.

Используя Следствие. C1 и замечая, что во время скользящего движения $\dot{d}_i = -\mu \chi(d_i)$, и тогда d_i монотонно убывает 0 от d_\downarrow по (15), таким образом, сохраняя требование $|d_i| \leq d_\downarrow$ Леммы D1, получаем следующее следствие.

Следствие D1. После переключения робота i в режим \mathfrak{T} , он находится в скользящем движении по \mathcal{S}_i пока $v_i \leq \bar{v} + \delta_\Sigma$.

Для состояния $\mathbf{x} = [\{(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)\}_{i=1}^N, t]$ группы роботов, робота i назовем *одиночным*, если $\mathbf{q}_i \neq \mathbf{q}_j \forall j \neq i$, и *групповым* иначе. Пусть q^\leftarrow обозначает любой предел, к которому сходится величина $q = q(\mathbf{x}')$ при $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$. Для одиночных роботов $s_i^\leftarrow = s_i$, и $s_i^\leftarrow = s_i, 0$ для групповых.

Лемма D2. Считаем, что $\mathbf{sgn} 0 := 0$. Существует $\Delta_\Sigma > 0$, такое что для любого j и отображения $\Sigma_i(s, t)$ из (14),

$$\begin{aligned} \exists \gamma = \pm 1 \text{ такое, что } \gamma &= \mathbf{sgn} \Sigma_i(s_i^\leftarrow, t) \forall s_i^\leftarrow \\ &\Rightarrow \gamma \frac{d}{dt} \Sigma_i(s_{i \rightarrow j}, t) \leq -\Delta_\Sigma, \text{ если робот } i \text{ находится на } \mathcal{S}_{\downarrow,i}. \end{aligned} \quad (\text{D2})$$

Доказательство. По (15) и (A9), $|v_{i,n} - V_n| \leq \mu \bar{\chi}$ на \mathcal{S}_i . Для $V_{*,\tau} := \sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2}$, $v_{*,\tau} := \sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2}$ видим, что

$$\begin{aligned} |v_{i,\tau} - V_{*,\tau}| &\leq \frac{\mu \bar{\chi} \bar{v}}{\sqrt{\bar{v}^2 - [|V_n| + \mu \bar{\chi}]^2}} \stackrel{(C3)}{\leq} \frac{\mu \bar{\chi} \bar{v}}{\sqrt{\bar{v} \Delta_v - \Delta_v^2/4}}; \\ &|(|\omega| + |\kappa| v_{*,\tau})|v_{i,n}| - (|\omega| + |\kappa| V_{*,\tau})|V_n|| \\ &\leq (|\omega| + |\kappa| v_{*,\tau})|v_{i,n} - V_n| + |\kappa| |v_{*,\tau} - V_{*,\tau}| |V_n| \stackrel{(5), (19)}{\leq} \mu (\bar{\omega} + \bar{\kappa} v) \bar{\chi} + \frac{\mu \bar{\kappa} \chi \bar{v}^2}{\sqrt{\bar{v} \Delta_v - \Delta_v^2/4}}; \\ &|(|\omega| + |\kappa| v_{*,\tau})v_{*,\tau} - (|\omega| + |\kappa| V_{*,\tau})V_{*,\tau}| \\ &\leq [|\omega| + |\kappa| (v_{*,\tau} + V_{*,\tau})] |v_{*,\tau} - V_{*,\tau}| \leq \frac{\mu \bar{\chi} (\bar{\omega} + 2\bar{\kappa} v) \bar{v}}{\sqrt{\bar{v} \Delta_v - \Delta_v^2/4}}; \\ &\left| \frac{v_{i,n}}{\sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2}} - \frac{V_n}{\sqrt{\bar{v}^2 - V_n^2}} \right| \leq \frac{\mu \bar{v}^3 \bar{\chi}}{(\bar{v} \Delta_v - \Delta_v^2/4)^{3/2}}. \end{aligned}$$

По Рис. 1b, $\vartheta_1 = 0, \vartheta'_1 = 0$ когда $|d_i| > \delta_2 d_\downarrow$. Наоборот, если $|d_i| \leq \delta_2 d_\downarrow$, имеем

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\omega + \kappa v_{i,\tau}}{1 + \kappa d_i} \right| &\stackrel{(19)}{\leq} \frac{\bar{\omega} + \bar{\kappa} \bar{v}}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow}, \quad |\dot{s}_i| \stackrel{(A8)}{\leq} \frac{\bar{v} + \bar{\omega} \delta_2 d_\downarrow}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow}, \\
|\dot{\omega}| &\stackrel{(A12)}{\leq} \bar{\omega}' \frac{\bar{v} + \bar{\omega} \delta_2 d_\downarrow}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow} + \bar{\epsilon}, \quad |\dot{\kappa}| \leq \bar{\kappa}' \frac{\bar{v} + \bar{\omega} \delta_2 d_\downarrow}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow} + \bar{\wp}, \\
\left| \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega + \kappa v_{i,\tau}}{1 + \kappa d_i} d_i \right] \right| &\stackrel{(A10)}{=} \left| \frac{(\omega + \kappa v_{i,\tau})[\dot{d}_i - \dot{\kappa} d_i^2]}{(1 + \kappa d_i)^2} + \frac{\dot{\omega} + \dot{\kappa} v_{i,\tau} d_i + \frac{\kappa d_i}{1 + \kappa d_i} \left[a_{i,\tau} + \frac{\omega + \kappa v_{i,\tau}}{1 + \kappa d_i} v_{i,n} \right]}{(1 + \kappa d_i)^2} \right| \\
&\leq \left[\frac{(\bar{\omega} + \bar{\kappa} \bar{v}) \bar{\kappa}' (\bar{v} + \bar{\omega} d_\downarrow) d_\downarrow}{(1 - \bar{\kappa} d_\downarrow)^3} + \frac{\bar{\epsilon}}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow} + \frac{(\bar{\wp} + \bar{\omega}' + \bar{v} \bar{\kappa}') (\bar{v} + \bar{\omega} d_\downarrow)}{(1 - \bar{\kappa} d_\downarrow)^2} \right] \delta_2 d_\downarrow \\
&+ \frac{(\bar{\omega} + \bar{\kappa} \bar{v}) (\mu \bar{\chi} + \bar{\kappa} \bar{v} d_\downarrow)}{(1 - \bar{\kappa} d_\downarrow)^2} + \frac{\bar{\kappa} d_\downarrow \bar{a}}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow} \stackrel{(17)}{\leq} \frac{(\bar{\omega} + \bar{\kappa} \bar{v}) (\mu \bar{\chi} + \bar{\kappa} \bar{v} d_\downarrow)}{(1 - \bar{\kappa} d_\downarrow)^2} + \frac{\bar{\kappa} d_\downarrow \bar{a}}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow} + \frac{\Delta_a^\tau}{6}.
\end{aligned} \tag{D3}$$

Заметим, что $a_i^{\tau, \leftarrow} = -\gamma \bar{a}_\tau - b_i^{\Sigma, \leftarrow}$ по (13) и (D2). Следовательно

$$\begin{aligned}
\Sigma_i(s, t) &\stackrel{\text{Рис. 1b}, (14), (A8)}{=} v_{i,\tau} - \vartheta_1 \frac{\omega + \kappa v_{i,\tau}}{1 + \kappa d_i} d_i - \left[\vartheta_3 \sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2} + \vartheta_4 \Xi(s) \right]; \\
\gamma \frac{d}{dt} \Sigma_i(s_{i \rightarrow j}, t) &\stackrel{(13), (14), (A10)}{=} -\bar{a}_\tau - \gamma A^\leftarrow, \quad \text{где } A^\leftarrow := \frac{\kappa d_i (\omega + \kappa v_{i,\tau})}{1 + \kappa d_i} v_{i,n} \\
&- (\omega + \kappa v_{i,\tau}) v_{i,n} - \vartheta_3 \left[\frac{d_i}{d_\downarrow} \right] \frac{v_{i,n}}{\sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2}} \left[a_{i,n} + \frac{\kappa d_i (\omega + \kappa v_{i,\tau})}{1 + \kappa d_i} v_{i,\tau} - (\omega + \kappa v_{i,\tau}) v_{i,\tau} \right] \\
&+ \vartheta_4 \left[\frac{d_i}{d_\downarrow} \right] \frac{d \Xi(s_{i \rightarrow j})}{dt} + \vartheta_3 \cdot \left[\frac{\dot{d}_i}{d_\downarrow} \sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2} - \frac{\dot{d}_i}{d_\downarrow} \Xi(s_{i \rightarrow j}) \right] \\
&+ b_i^{\Sigma, \leftarrow} + \vartheta'_1 \dot{d}_i \frac{\omega + \kappa v_{i,\tau}}{1 + \kappa d_i} \frac{d_i}{d_\downarrow} + \vartheta_1 \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega + \kappa v_{i,\tau}}{1 + \kappa d_i} d_i \right]; \\
|A^\leftarrow| &\stackrel{(14), (19), (21), (C3)}{\leq} \frac{\bar{\kappa} d_\downarrow (\bar{\omega} + \bar{\kappa} \bar{v}) \bar{v}}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow} + (|\omega| + |\kappa| |v_{i,\tau}|) |v_{i,n}| \\
&+ \frac{v_{i,n}}{\sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2}} \left[\bar{a}_n + \frac{\bar{\kappa} d_\downarrow (\bar{\omega} + \bar{\kappa} \bar{v}) \bar{v}}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow} + (|\omega| + |\kappa| |v_{i,\tau}|) |v_{i,\tau}| \right] \\
&+ \bar{\Xi}' |\dot{s}_{i \rightarrow j}| + \left[\frac{(\bar{v} + \bar{\Xi}) \bar{\vartheta}'_3}{d_\downarrow} + \frac{(\bar{\vartheta}'_1 + 1) (\bar{\omega} + \bar{\kappa} \bar{v})}{(1 - \bar{\kappa} d_\downarrow)^2} \right] \mu \bar{\chi} + \frac{(\bar{\omega} + \bar{\kappa} \bar{v}) \bar{\kappa} \bar{v} d_\downarrow}{(1 - \bar{\kappa} d_\downarrow)^2} + \frac{\bar{\kappa} d_\downarrow \bar{a}}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow} + \frac{\Delta_a^\tau}{6} + N \kappa_b \\
&\stackrel{(25), (C3), |v_{i,\tau}| \leq v_{*,\tau}}{\leq} \underbrace{(2(|\omega| + |\kappa| V_{*,\tau}) |V_n| + |V_n| \bar{a}_n (\bar{v}^2 - V_n^2)^{-1/2} + \bar{\Xi}' |\dot{s}_{i \rightarrow j}| + \frac{2 \Delta_a^\tau}{6})}_{\leq \bar{a}_\tau - \Delta_a^\tau \text{ по Предп. 3}} \\
&+ \frac{\bar{\kappa} d_\downarrow}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow} \left[\bar{a} + 2 \frac{(\bar{\omega} + \bar{\kappa} \bar{v}) \bar{v}}{1 - \bar{\kappa} d_\downarrow} \right] \left[1 + \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{v} \Delta_v - \Delta_v^2/4}} \right] \\
&+ \left\{ \frac{(\bar{v} + \bar{\Xi}) \bar{\vartheta}'_3}{d_\downarrow} + \frac{\bar{v}^3 [\bar{a}_n + (\bar{\omega} + \bar{\kappa} \bar{v}) \bar{v}]}{(\bar{v} \Delta_v - \Delta_v^2/4)^{3/2}} + \frac{(\bar{\vartheta}'_1 + 2) (\bar{\omega} + \bar{\kappa} \bar{v})}{(1 - \bar{\kappa} d_\downarrow)^2} \right. \\
&\quad \left. + \left[\bar{\kappa} + \frac{(\bar{\omega} + 2 \bar{\kappa} \bar{v})}{\sqrt{\bar{v} \Delta_v - \Delta_v^2/4}} \right] \frac{\bar{v}^2}{\sqrt{\bar{v} \Delta_v - \Delta_v^2/4}} \right\} \mu \bar{\chi}.
\end{aligned}$$

По (18), (23) четвёртое и пятое слагаемое меньше чем $\Delta_a^\tau/6$. По (5), (19), (A7) и (A8) $|\dot{s}_{i \rightarrow j}(t)| \leq 2(\bar{v} + \bar{\omega}d_\downarrow)/(1 - \bar{\kappa}d_\downarrow) + \bar{p}\bar{\kappa}\bar{v}$, тогда $\bar{\Xi}'|\dot{s}_{i \rightarrow j}| < \Delta_a^\tau/6$ по (21). Следовательно, $|A^\leftarrow| \leq \bar{a}_\tau - \Delta_a^\tau/6$. Собирая все части вместе, получаем (D2). \square

Замечание D2. (D2) остаётся верным, если заменить $s_{i \rightarrow j}(\cdot)$ на другую функцию $s(\cdot)$, такую что

$$|\dot{s}| \leq 2(\bar{v} + \bar{\omega}d_\downarrow)/(1 - \bar{\kappa}d_\downarrow) + \bar{p}\bar{\kappa}\bar{v}, \quad (\text{D4})$$

и в (14) заменить $\Xi(\cdot)$ на любую функцию $\Xi_*(\cdot)$, такую что $|\Xi_*(s)| \leq \bar{\Xi}$ и $|\Xi'_*(s)| \leq \bar{\Xi}'$ для всех s .

Замечание D3. По соображению непрерывности, вывод из (D2) (возможно, с меньшим $\Delta_\Sigma > 0$) остаётся верным при условии, что робот находится в $\mathcal{S}_{\downarrow,i}^{\delta_\Sigma}$ и $\delta_\Sigma > 0$ достаточно мало.

Лемма D3. В режиме \mathfrak{T} скользящее движение \mathcal{S}_i сохраняется, $v_i < \bar{v}$, $|d_i| < d_\downarrow$, $\|\mathbf{a}_i\| \leq \bar{a}$, и $\Sigma_i(0, t) \geq 0$, $\Sigma_i(\Delta^s, t) \leq 0$.

Доказательство. Пусть $t = 0$ будет временем начала режима \mathfrak{T} . Ввиду непрерывности, робот i остаётся в $\mathcal{S}_{\downarrow,i}^{\delta_\Sigma}$ из Замечаний D1 и D3 для некоторого периода $[0, t_*]$, $t_* > 0$ по Следствию C1. Используя Замечание D2, видим, что $\Sigma_i(\Delta^s, t) > 0 \Rightarrow \Sigma_i(s_i^-, t) > 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\Sigma_i(\Delta^s, t) < 0$ и $\Sigma_i(0, t) < 0 \Rightarrow \Sigma_i(s_i^-, t) < 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\Sigma_i(0, t) > 0$. Поскольку $\Sigma_i(\Delta^s, 0) \leq 0$ и $\Sigma_i(0, 0) \geq 0$ по (14), (20), и (C1), делаем вывод, что $\Sigma_i(0, t) \geq 0$, $\Sigma_i(\Delta^s, t) \leq 0 \forall t \in (0, t_*]$. Тогда если $d_i \geq \delta_2 d_\downarrow$, то

$$|v_{i,\tau}| \stackrel{(14)}{\leq} \vartheta_3 \sqrt{[\bar{v}^2 - v_{i,n}^2]_+} + \vartheta_4 \Xi(\Delta^s), \text{ где } \Xi(\Delta^s) \stackrel{(20),(C3)}{<} \sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2} \text{ и } \vartheta_4 = 1 - \vartheta_3 \in (0, 1]$$

по Рис. 1b. Отсюда следует, что $v_i^2 = v_{i,n}^2 + v_{i,\tau}^2 < \bar{v}^2$ для $t \in (0, t_*]$. Если $d_i \leq \delta_2 d_\downarrow$, по Рис. 1b, имеем

$$\begin{aligned} \Xi(\Delta^s) &\stackrel{(14)}{\geq} \vartheta_1 \dot{s}_i + \vartheta_2 v_{i,\tau} \stackrel{(A8)}{=} v_{i,\tau} - \vartheta_1 \frac{\omega + \kappa v_{i,\tau}}{1 + \kappa d_i} d_i \stackrel{(D3)}{\Rightarrow} |v_{i,\tau}| \leq \Xi(\Delta^s) + \frac{\bar{\omega} + \bar{\kappa}\bar{v}}{1 - \bar{\kappa}d_\downarrow} \delta_2 d_\downarrow \\ &\stackrel{(18),(20),(C3)}{<} \sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2} \Rightarrow v_i < \bar{v} \forall t \in (0, t_*]. \end{aligned}$$

Таким образом, робот i совершает скользящее движение по \mathcal{S}_i для $t \in [0, t_*]$ по Лемме D1. Тогда $\dot{d}_i = -\mu\chi(d_i)$, следовательно, d_i монотонно убывает к 0 по (15), тем самым оставаясь в $[-d_\downarrow, d_\downarrow]$. Таким образом, заключение леммы верно на любом интервале $[0, t_*)$, в течении которого робот не покидает $\mathcal{S}_{\downarrow,i}^{\delta_\Sigma}$. Пусть $[0, t_*)$ будет максимальным таким интервалом. Предположим, что $t_* < \infty$. В силу сказанного, робот фактически находится в замкнутом многообразии $\mathcal{S}_{\downarrow,i}$ для $t \in [0, t_*]$, тем самым, остаётся в открытом множестве $\mathcal{S}_{\downarrow,i}^{\delta_\Sigma}$ немного дольше, что противоречит определению t_* . Это противоречие доказывает, что $t_* = \infty$.

По (12)–(14), (25) и Рис. 1а, имеем $\|\mathbf{a}_i\|^2 \leq \bar{a}_n^2 + (\bar{a}_\tau + N\kappa_b)^2 \leq \bar{a}_n^2 + \bar{a}_\tau^2 + 2N\bar{a}\kappa_b + N^2\kappa_b^2 \leq \bar{a}^2$, что завершает доказательство Леммы. \square

Следствие D2. В режиме \mathfrak{T} любой робот i движется к целевой кривой $d_i \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если роботы i и j переходят в режим \mathfrak{T} одновременно, тогда $d_i \equiv d_j$ в этом режиме; иначе, $d_i \neq d_j$ в любое время в течении режима \mathfrak{T} .

Лемма D4. Если $s_{i \rightarrow j} \geq 0$ и $\Sigma_i(s_{i \rightarrow j}, t) \leq 0$ в $t = t_*$, тогда $\Sigma_i(s_{i \rightarrow j}, t) \leq 0$ для $t \geq t_*$ при $s_{i \rightarrow j} \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим $t \geq t_*$ из интервала, для которого $s_{i \rightarrow j} \geq 0$. Для $\eta(t) := \Sigma_i[s_{i \rightarrow j}(t), t]$ имеем $\eta > 0 \Rightarrow \Sigma_i[s_i^-, t] > 0$ по (14) и (20). Тогда $\dot{\eta}(t) < 0$ по (D2). Для $\eta_+(t) := \max\{\eta(t); 0\}$ теорема Данскина^[3] утверждает, что $\dot{\eta}_+(t) = 0$, если $\eta_+(t) \leq 0$, и $\dot{\eta}_+(t) = \dot{\eta}(t) < 0$, если $\eta_+(t) > 0$. В целом, $\dot{\eta}_+(t) \leq 0$ п.в. и $\eta_+(t_*) = 0$, из чего следует заключение леммы. \square

Лемма D5. i) Пусть роботы $i \neq j$ переходят в режим \mathfrak{T} одновременно. Тогда $\mathbf{q}_i \neq \mathbf{q}_j$ в течение этого режима. ii) Если $s_{i \rightarrow j} > 0$, $\Sigma_i(s_{i \rightarrow j}, t) \leq 0$ и $d_i, d_j < \delta_1 d_\downarrow$ в момент $t = t_*$, тогда $s_{i \rightarrow j} > 0$ после него.

Доказательство. i) Предположим противное. Пусть t_- — наименьшее время, когда проекция одного из роботов, скажем i , совпадает с проекцией робота j . Далее в доказательстве $t < t_-, t \approx t_-$. Для таких t , имеем

$$s_{i \rightarrow j}(t) > 0 \quad \text{и} \quad s_{i \rightarrow j}(t_-) = 0. \quad (\text{D5})$$

По (14), Рис. 1b и Следствиям C1, C2, $\Sigma_i[s_{i \rightarrow j}(t), t] = 0$ и $\mathbf{q}_i \neq \mathbf{q}_j$ в $t = 0$. Поскольку t_- — первый момент времени, когда $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j$, (D5) означает, что $s_{i \rightarrow j}$ непрерывно изменяется от $s_{i \rightarrow j}(0) > 0$ до 0 в момент t_- . Тогда Лемма D4 гарантирует, что для $t \in [0, t_-]$,

$$\Sigma_i[s_{i \rightarrow j}(t), t] \leq 0 \stackrel{(14), (A8)}{\iff} \dot{s}_i(1 + \vartheta_2 \kappa d_i) + \vartheta_2 \omega d_i \leq \vartheta_3 \sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2} + \vartheta_4 \Xi(s_{i \rightarrow j}).$$

По Лемме D3, $0 \leq \Sigma_j(0, t) = \dot{s}_j(1 + \vartheta_2 \kappa d_j) + \vartheta_2 \omega d_j - [\vartheta_3 \sqrt{\bar{v}^2 - v_{j,n}^2} + \vartheta_4 \Xi(0)]$. Поскольку $d_i \equiv d_j$ по Следствию D2, величины ϑ_k принимают общие значения для роботов i и j в режиме \mathfrak{T} . По Предположению 4, (19) выполнено для $q := V$. По (A7) и (A8),

$$\begin{aligned} \dot{s}_{i \rightarrow j} \geq & \frac{\vartheta_3 \sqrt{\bar{v}^2 - v_{j,n}^2} + \vartheta_4 \Xi(0) - \vartheta_2 \omega(\mathbf{q}_j, t) d_j}{1 + \vartheta_2 \kappa(\mathbf{q}_j, t) d_j} \\ & - \frac{\vartheta_3 \sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2} + \vartheta_4 \Xi(s_{i \rightarrow j}) - \vartheta_2 \omega(\mathbf{q}_i, t) d_i}{1 + \vartheta_2 \kappa(\mathbf{q}_i, t) d_i} - \bar{\kappa} \bar{V} s_{i \rightarrow j}. \quad (\text{D6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \sqrt{\bar{v}^2 - v_{i,n}^2(t)} - \sqrt{\bar{v}^2 - v_{j,n}^2(t)} \right| \stackrel{(A9)}{=} \left| \sqrt{\bar{v}^2 - [V_n(\boldsymbol{\varrho}_i) - \mu\chi(d_i)]^2} - \sqrt{\bar{v}^2 - [V_n(\boldsymbol{\varrho}_j) - \mu\chi(d_i)]^2} \right| \\
& \stackrel{(C3)}{\leq} \frac{\bar{V} + \mu\bar{\chi}}{\sqrt{\bar{v}\Delta_v - \Delta_v^2/4}} \|V(\boldsymbol{\varrho}_i) - V(\boldsymbol{\varrho}_j)\| \leq c_V \frac{\bar{V} + \mu\bar{\chi}}{\sqrt{\bar{v}\Delta_v - \Delta_v^2/4}} s_{i \rightarrow j}.
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся тем, что по Предположениям 1, 4 любая $f(\boldsymbol{\varrho}, t) := \varkappa(\boldsymbol{\varrho}, t), \omega(\boldsymbol{\varrho}, t), V(\boldsymbol{\varrho}, t)$ равномерно непрерывна по t :

$$|f(\boldsymbol{\varrho}_i, t) - f(\boldsymbol{\varrho}_j, t)| \leq c_f s_{i \rightarrow j}. \quad (D7)$$

Из этого получаем, что

$$\dot{s}_{i \rightarrow j} \geq \frac{\vartheta_4[\Xi(0) - \Xi(s_{i \rightarrow j})]}{1 + \vartheta_2 \varkappa(\boldsymbol{\varrho}_j, t) d_i} - \Omega s_{i \rightarrow j}, \quad (D8)$$

для некоторого $\Omega \in (0, \infty)$. Тем временем, $s^0(t) \equiv 0$ решает ОДУ, получаемую заменой $\geq \mapsto =$ в (D8). Тогда $\exists t < t_- : s_{i \rightarrow j}(t) > s^0(t) \Rightarrow s_{i \rightarrow j}(t_-) > s^0(t_-) = 0$ по Теореме 4.1 Главы 3 [7], что нарушает (D5). Это противоречие завершает доказательство.

ii) Предположим противное. Пусть t_- будет наименьшим моментом времени $t > t_*$, когда $s_{i \rightarrow j} = 0$; тогда (D5) выполняется. Для $t \geq t_*$ имеем $d_i, d_j < \delta_1 d_\downarrow$ по Следствию D2, тогда $\Sigma_i(s_{i \rightarrow j}, t) = \dot{\mathbf{s}}_i - \Xi(s_{i \rightarrow j}) \leq 0 \forall t \in [t_*, t_-]$ по (14), Рис. 1b и Лемме D4, в то время как $\Sigma_j(0) = \dot{\mathbf{s}}_j - \Xi(0) \geq 0$ по Лемме D3. Тогда (D6), (D8) принимают следующую форму: $\dot{s}_{i \rightarrow j} \geq \Xi(0) - \Xi(s_{i \rightarrow j}) - \varkappa \bar{V} s_{i \rightarrow j}$. Это противоречит (D5), что завершает доказательство. \square

Объединяя Леммы C3, D5 и Следствие D2, получаем следующее.

Следствие D3. *Справедливы утверждения i)—iii) Теоремы 1.*

Следовательно, существует момент времени t_\dagger , такой что для $t \geq t_\dagger$ все роботы находятся в режиме \mathfrak{T} , и для любого робота i

$$|\lambda_i - \omega V_n| \stackrel{(A12)}{<} \delta_b/8 \forall k, |d_i| < \delta_1 d_\downarrow, \text{ так что } \Sigma_i(s, t) = \dot{\mathbf{s}}_i - \Xi(s) \text{ по (14) и Рис. 1b, } (D9)$$

где δ_b и δ_1 взяты из Рис. 1. До конца раздела рассматриваем $t \geq t_\dagger$. Тогда состояние системы $[\mathbf{x}(t) = \{(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)\}_{i=1}^N, t]$ лежит в открытом множестве $\mathfrak{X} := \{(\mathbf{x}, t) : |d_i| < d_\downarrow, |\dot{d}_i + \mu\chi(d_i)| < \delta_\Sigma \forall i\}$, где δ_Σ из Замечания D1. Из Предположения 4, (16) и (A8) следует, что в \mathfrak{X} может быть использован другой набор независимых координат $\mathbf{y} = [\{(d_i, \dot{d}_i, \boldsymbol{\varrho}_i \in \Gamma(t), \dot{\mathbf{s}}_i)\}_{i=1}^N, t]$, поскольку \mathbf{x} и \mathbf{y} находятся во взаимно однозначном гладком соответствии. В \mathfrak{X} введём поверхности состояний \mathfrak{S}_d и $\mathfrak{S}_{i,j}, i \neq j$, для которых $\dot{d}_k + \mu\chi(d_k) = 0, v_{k,\tau} > 0 \forall k$ и $\boldsymbol{\varrho}_i = \boldsymbol{\varrho}_j$, соответственно. По Лемме D3 система проходит по \mathfrak{S}_d для $t \geq t_\dagger$.

Лемма D6. *Пусть $[\mathbf{x}(t), t] \in \mathfrak{S}_d^{\text{sep}} := \mathfrak{S}_d \setminus \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{S}_{i,j} \forall t \in [t_-, t_+)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- i) Траектория однозначно определена, задаётся начальным состоянием при $t = t_-$ и гладко зависит от состояния;
- ii) Если $\dot{s}_i(t_*) = \Xi[s_i(t_*)]$ для некоторого $t_* \in [t_-, t_+)$, скользящее движение по поверхности $\dot{s}_i = \Xi(s_i)$ продолжается для $t \in [t_*, t_+)$;
- iii) Если $\dot{s}_i(t_*) \leq \Xi[s_i(t_*)]$ для некоторого $t_* \in [t_-, t_+)$ и i , робот i не может догнать своего предшественника на промежутке $[t_*, t_+]$.

Доказательство. Утверждение ii) следует из Леммы D2; i) следует из ii), (13), Леммы D3 и Раздела 11 Главы 2 [5]. Утверждение iii) получается аналогично доказательству Леммы D5, замечая что $\vartheta_2 = \vartheta_3 = 0, \vartheta_4 = 1$ в (D6), (D8) по Рис. 1b. \square

Лемма D7. i) Из любого состояния $\mathfrak{S}_d^m := \mathfrak{S}_d \setminus \mathfrak{S}_d^{\text{sep}}$ и в любой момент $t_0 \geq t_+$ исходит траектория, которая лежит в $\mathfrak{S}_d^{\text{sep}}$ для $t > t_0, t \approx t_0$. ii) Последний абзац Раздела 4 исключает другие возникающие траектории из рассмотрения.

Доказательство. i) Рассмотрим такое состояние. Мы нумеруем роботов в порядке следования их проекций \mathbf{q}_i против часов стрелки в этом состоянии; внутри каждой группы I_l с общим \mathbf{q}_i , если существует, в порядке возрастания \dot{s}_i ; и произвольно внутри каждой группы с общими \mathbf{q}_i и \dot{s}_i , если такая существует. Для этого состояния зададим систему, управляемую законом (12)–(14) с $s_i := s_{i \rightarrow i \oplus 1}$ в (13) и (14), $\Xi(z) := \Xi(0), b(z) := 1 \forall z \leq 0$ и $\Xi(z) := \Xi(\Delta^s) \forall z \geq \Delta^s$, где введённая нумерация используется в последней сумме в (14). Повторяя доказательство Теоремы D6, видим, что для $t > t_0, t \approx t_0$, соответствующая траектория \mathbf{t} существует, единственна и соответствует ii) из Леммы D6. Для таких t группы I_l с различными l сохраняют свой порядок на $\Gamma(t)$ по соображению непрерывности. Внутри каждой группы I_l подгруппы J_* с общей \dot{s}_i в $t = t_0$ выстраиваются в порядке возрастания \dot{s}_i , поскольку $\dot{s}_{i \rightarrow j} = \dot{s}_j - \dot{s}_i$ в $t = t_0$ по (A7). Рассмотрим подгруппы J_* с более чем одним элементом.

Сперва предположим, что $\dot{s}_i(t_0) > \Xi(0) \forall i \in J_*$. Для $j := i \oplus 1$ и любого $i \in J_m$ кроме минимального, $\dot{s}_i(t) > \Xi[s_{i \rightarrow j}(t)]$ по соображению непрерывности. Также отметим, что (19) выполнено для \mathfrak{A} из (A11) и $s := s_{i \rightarrow j}, \forall i, j$, и (D7) выполнено для $f := \omega V_n$. Тогда

$$\begin{aligned}
\ddot{s}_{i \rightarrow j} &\stackrel{(12), (14), (A11), (D9), \text{Рис. 1a}}{=} -\bar{a}_\tau \cdot \mathbf{sgn} [\dot{s}_j - \Xi(s_{j \rightarrow j \oplus 1})] + \bar{a}_\tau \cdot \mathbf{sgn} [\dot{s}_i - \Xi(s_{i \rightarrow j})] \\
&\quad + b_i^\Sigma - b_j^\Sigma + \lambda_j - \lambda_i - \oint_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j} \mathfrak{A} ds \quad (\text{D10}) \\
&\geq \kappa_b/4 - |\omega(\mathbf{q}_j, t)V_n(\mathbf{q}_j, t) - \omega(\mathbf{q}_i, t)V_n(\mathbf{q}_i, t)| - \bar{\mathfrak{A}}|s_{i \rightarrow j}| \geq \kappa_b/4 - (c_{\omega V_n} + \bar{\mathfrak{A}})|s_{i \rightarrow j}| \\
&\geq \kappa_b/8 \Rightarrow s_{i \rightarrow j}(t) \geq \kappa_b(t - t_0)^2/16 > 0 \text{ если } t < t_0 + \eta, \text{ где } \eta := \kappa_b[8\bar{s}(c_{\omega V_n} + \bar{\mathfrak{A}})]^{-1}. \quad (\text{D11})
\end{aligned}$$

Теперь предположим, что $\dot{s}_i(t_0) = \Xi(0) \forall i \in J_* = \{k, k \oplus 1, \dots, m\}$. Поскольку \mathbf{t} соответствует ii) в Лемме D6, $\dot{s}_i = \Xi(s_{i \rightarrow i \oplus 1}) \forall i \in J_*$ и тогда

$$\begin{aligned} \dot{s}_{m \ominus 1 \rightarrow m} &\stackrel{(19), (A7)}{=} \underbrace{\Xi(s_{m \rightarrow m \oplus 1}) - \Xi(0)}_g - [\Xi(s_{m \ominus 1 \rightarrow m}) - \Xi(0)] - \bar{\kappa} \bar{V}_n |s_{m \ominus 1 \rightarrow m}| \\ &\stackrel{(21)}{\geq} g - \alpha |s_{m \ominus 1 \rightarrow m}|, \quad \text{где } \alpha := \bar{\Xi}' + \bar{\kappa} \bar{V}_n. \end{aligned} \quad (\text{D12})$$

Затем, $s_{m \ominus 1 \rightarrow m} \geq s$ по Теореме 4.1 Главы 3 [7], где

$$s(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} s_{m \ominus 1 \rightarrow m}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} g(\tau) d\tau$$

является решением ОДУ $\dot{s} = -\alpha|s|$, как минимум, пока $s_{m \rightarrow m \oplus 1} > 0$. Следовательно, $s_{m \ominus 1 \rightarrow m} > 0$ для $t > t_0$ и пока $s_{m \rightarrow m \oplus 1} > 0$. Это позволяет нам применить (D12) для $m := m \ominus 1$, затем для $m := m \ominus 2$, и так далее до $m = k$.

Таким образом, все ϱ_i попарно различны и направлены против часовой стрелки. Следовательно, $\varrho_{i \oplus 1}$ является непосредственным предшественником ϱ_i . Поэтому $s_i = s_{i \rightarrow i \oplus 1}$, и изменённый закон управления идентичен оригинальному. Это завершает доказательство первого утверждения леммы.

ii) Предположим, что утверждение неверно, и рассмотрим соответствующую траекторию \mathbf{t} . Также положим $\varrho_i \neq \varrho_j$ в моменты $t > t_0$, которые произвольно близки к t_0 . Покажем, что $\varrho_i \neq \varrho_j \forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Предположим противное, тогда существует промежуток (t_-, t_+) , такой что $t_- > t_0$, $\varrho_i(t_{\pm}) = \varrho_j(t_{\pm})$ и $\varrho_i(t) \neq \varrho_j(t) \forall t \in (t_-, t_+)$; пусть $s_{i \rightarrow j} > 0 \forall t \in (t_-, t_+)$ для определённости. Тогда $\dot{s}_i > \Xi(s_{i \rightarrow j}) \geq \Xi(s_i) \forall t \in (t_-, t_+)$ по (20), (D9), и ii) в Лемме D5, при $\dot{s}_{i \rightarrow j}(t_-) \geq 0$. Следовательно, применяя (D10), видим, что $\ddot{s}_{i \rightarrow j} = -\bar{a}_\tau \cdot \text{sgn}[\dot{s}_j - \Xi(s_j)] + \bar{a}_\tau \cdot \text{sgn}[\dot{s}_i - \Xi(s_i)] + b_i^\Sigma - b_j^\Sigma + \lambda_j - \lambda_i - \oint_{\varrho_i}^{\varrho_j} \mathfrak{A} ds \geq \kappa_b/8$, $s_{i \rightarrow j}(t_+) = s_{i \rightarrow j}(t_-) + \dot{s}_{i \rightarrow j}(t_-)(t_+ - t_-) + \int_{t_-}^{t_+} \ddot{s}_{i \rightarrow j}(\tau) d\tau \geq \kappa_b(t_+ - t_-)^2/16 > 0$, что противоречит равенству $s_{i \rightarrow j}(t_+) = 0$.

Следовательно, существует промежуток $T := (t_0, t_0 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ такой, что если $i \neq j$, либо $\varrho_i \equiv \varrho_j$ на T , либо $\varrho_i \neq \varrho_j$ на T . Определение \mathbf{t} означает, что (i, j) первого типа существуют. Далее покажем, что \mathbf{t} нереализуема. Достаточно сделать это при условии, что t_0 подвергается сколь угодно малому увеличению. Тогда множество роботов может быть организовано в группы так, что $\varrho_i \equiv \varrho_j$ внутри группы, и $\varrho_i \neq \varrho_j \forall [t_0, t_0 + \varepsilon]$, если i и j в разных группах. Общий размер групп с размером ≥ 2 называется *степенью* траектории \mathbf{t} . Покажем, что любая траектория со степенью $m \geq 2$ нереализуема, с помощью индукции по m .

Пусть $m = 2$. С помощью перенумерации роботов, если необходимо, гарантируем, что $\varrho_0 \equiv \varrho_1$ (и тогда $\dot{s}_{0 \rightarrow 1}(t_0) = 0$) и $\varrho_i \neq \varrho_{i \oplus 1}, i = 1, \dots, N-1$ на T . Почти все небольшие возмущения состояния приводят к $\dot{s}_0 \neq \dot{s}_1$ и $\varrho_0 \neq \varrho_1$ в $t = t_0$; с помощью перенумерации можно обеспечить, что $s_{0 \rightarrow 1}(t_0) > 0$. По (D10) с $i := 0, j := 1$, $s_{j \rightarrow j \oplus 1} \geq s_{i \rightarrow j} + \eta \forall t \in T$ если $\varepsilon \approx 0$, где $\eta > 0$ не зависит от t, ε . Таким образом, сумма первых

двух слагаемых (D10) неотрицательна, и потому, пока $s_{i \rightarrow j} > 0$,

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{i \rightarrow j} &\geq \kappa_b/4, \quad \dot{s}_{i \rightarrow j}(t) \geq \dot{s}_{i \rightarrow j}(t_0) + \kappa_b(t - t_0)/4, \\ s_{i \rightarrow j}(t) &\geq s_{i \rightarrow j}(t_0) + \dot{s}_{i \rightarrow j}(t_0)(t - t_0) + \kappa_b(t - t_0)^2/8. \quad (\text{D13})\end{aligned}$$

Если а) $\dot{s}_{0 \rightarrow 1}(t_0) \geq 0$, возмущенная траектория уходит от \mathbf{t} на T . Пусть $\dot{s}_{0 \rightarrow 1}(t_0) < 0$. Тогда $s_{0 \rightarrow 1} > 0$ для всех $t \in T$, если или $\ddot{s}_{0 \rightarrow 1}(t_0) \geq 0$, или $D := \dot{s}_{0 \rightarrow 1}(t_0)^2 - \kappa_b s_{0 \rightarrow 1}(t_0)/2 < 0$; иначе, для всех $t \in (t_0, t_0 + \min\{\varepsilon, \delta\}]$, где $\delta := -[4\dot{s}_{0 \rightarrow 1}(t_0) + \sqrt{D}]/\kappa_b$. Тогда могут возникнуть следующие случаи. б) $\dot{s}_{0 \rightarrow 1}$ меняет знак в момент $t = t_* \approx t_0$ до того, как меняет знак $s_{0 \rightarrow 1}$. В момент $t = t_*$ имеем случай а), значит \mathbf{t} — неустойчива. в) $s_{0 \rightarrow 1}$ меняет знак в момент $t = t_* \approx t_0$ до того, как знак меняет $\dot{s}_{0 \rightarrow 1}$. С помощью перенумерации $0 \rightleftharpoons 1$ в $t = t_*$, снова приходим к а). д) $s_{0 \rightarrow 1}$ и $\dot{s}_{0 \rightarrow 1}$ одновременно меняют знак, т.е. приходят к 0 в момент $t = t_* \approx t_0$. Пока $s_{0 \rightarrow 1} > 0$ движение робота 0 идентично тому, что сгенерировано модифицированным законом управления. Теперь рассмотрим возмущение $s_1(t_0) + \eta, \eta \approx 0$ начального состояния. По Разделу 11 [5], результирующее отклонение общей траектории является липшицевым по η . Отсюда следует, что на T возмущение $s_{0 \rightarrow 1}$ имеет форму $\eta s + \zeta(t)$, где $|\zeta(t)| \leq \Upsilon \varepsilon$ и Υ не зависит от ε . Итак, выбирая ε достаточно малым, можем гарантировать, что возмущение $s_{0 \rightarrow 1}$ имеет порядок η равномерно на T . Поскольку для невозмущенного $s_{0 \rightarrow 1}$ производная по времени равно нулю в корне t_* , делаем вывод, что, даже если корень t_*^\sim выдерживает возмущение, $|t_*^\sim - t_*| \sim \sqrt{|\eta|}$. Аналогично, корень $\dot{s}_{0 \rightarrow 1}$ — липшицев в η . Следовательно, эти два корня не совпадают при $\eta \approx 0, \eta \neq 0$. Таким образом, случай д) не выполняется почти для всех возмущений состояния и траектория \mathbf{t} нереализуема.

Теперь пусть любая траектория степени от 2 до m нереализуема, и пусть \mathbf{t} — траектория степени $m + 1$. Пусть I — группа $m + 1$ роботов в течение T . В момент $t = t_0$ рассмотрим возмущение состояния системы, такое что все роботы становятся отделёнными. Пусть j — ведущий робот в I . В интервале $T_{\rightarrow j} \subset T$, где j ведёт среди I , аргументы из первой части доказательства ii) показывают, что (D13) выполнено для любого $i \in I_{j\downarrow} := I \setminus \{j\}$. Следовательно, если а) $I_- := \{i \in I_{j\downarrow} : \dot{s}_{i \rightarrow j}(t_0) < 0\} = \emptyset$, возмущенная траектория уходит от \mathbf{t} на T . Иначе, $\dot{s}_{i \rightarrow j}(t) > 0 \forall i \in I_{j\downarrow}$ не позже, чем $t_* := t_0 + 4/\kappa_b \max_{i \in I_-} |\dot{s}_{i \rightarrow j}(t_0)|$ если j не был опережён ранее. Если этого не произошло, получаем а) в $t = t_*$ и, тем самым, что \mathbf{t} нереализуема. Предположим, что это произошло, пусть t_* — соответствующий момент времени. Если на промежутке (t_0, t_*) «сцепились» два робота из I , то степень возмущенной траектории находится между 2 и m . Следовательно, по предположению индукции она нереализуема, значит, и начальная траектория тоже. Предположим, что на промежутке (t_0, t_*) нет таких двух роботов из I . Используя заключение из предыдущего параграфа, видим, что для почти всех возмущений бывший ведущий робот j настигнут роботом $i \in I_-$ с ненулевой относительной скоростью. Это изменение влечёт уменьшение I_- как минимум на один

элемент. Продолжая аналогично, мы делаем вывод о нереализуемости t либо на каком-то шаге из-за «сцепления» двух роботов, либо после конечного числа смен лидера из-за неизбежного достижения а) в силу уменьшения в I_- . \square

Лемма D8. *Для любой рассматриваемой траектории моменты времени $t \geq t_+$, когда состояние в \mathfrak{S}_d^m , не накапливаются.*

Доказательство. Предположим противное. Принимая во внимание Лемму D7, это означает существование последовательности $t_+ = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ и пары $i \neq j$, такой что $\exists t_* = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k < \infty$ и $\varrho_i(t_k) = \varrho_j(t_k) \forall k$, при $\varrho_i(t) \neq \varrho_j(t) \forall t \in (t_k, t_{k+1})$. Считаем k достаточно большим. Расстояние $s_{i \rightarrow j}$ сохраняет знак на (t_k, t_{k+1}) ; пусть $s_{i \rightarrow j} > 0$ для определённости. Тогда ii) в Лемме D5 гарантирует, что $\Sigma_i(s_{i \rightarrow j}, t) > 0 \forall t \in (t_k, t_{k+1})$. Тогда (D10) и (D13) выполняются для $t_0 := t_k$. Поскольку $\dot{s}_{i \rightarrow j}(t_k) \geq 0$ в последнем равенстве в (D13), получаем противоречие с $s_{i \rightarrow j}(t_{k+1}) = 0$. \square

Следствие D4. *Для любого состояния и любого $t_0 \geq t_+$, траектория рассматриваемого типа возникает и продолжима на $[t_0, \infty)$; она заходит в \mathfrak{S}_d^m максимум конечное число раз на любом конечном промежутке времени.*

Лемма D9. *С некоторого времени, $\Sigma_i(s_i) \leq 0$ для всех роботов i и почти всех t .*

Доказательство. На любом промежутке T , где состояние лежит в $\mathfrak{S}_d^{\text{sep}}$, теорема Данскина^[3] означает, что $\alpha(t) := \max\{0, \max_i \Sigma_i(t)\}$ абсолютно непрерывна для почти всех t , имеем $\dot{\alpha}(t) = 0$ если $\Sigma_i(t) \leq 0 \forall i$; иначе, $\dot{\alpha}(t) = \max_{i \in M(t)} \dot{\Sigma}_i(t)$, где $M(t)$ — множество i , на которых достигается $\max_i \Sigma_i(t)$, а также что $\alpha(\cdot)$ имеет конечные односторонние пределы на концах T . Таким образом, на любом T имеем $\alpha(t) > 0 \Rightarrow \dot{\alpha}(t) \leq -\Delta_\Sigma$ по (D2), и достаточно показать, что $\alpha(t_*-) \neq \alpha(t_*) \Rightarrow \alpha(t_*-) \geq \alpha(t_*)$. Предположим противное, что $\alpha(t_*-) < \alpha(t_*)$. В $t = t_*$ найдётся робот i , для которого $\alpha(t_*) = \Sigma_i[s_i(t_*)] = \dot{s}_i(t_*) - \Xi[s_i(t_*)] > \dot{s}_j(t_*) - \Xi[s_j(t_*-)] \forall j$. Принимая $j := i$, видим что $s_i(t_*-) > s_i(t_*)$. Тогда $s_i(t_*) = 0$ и в $t = t_*$ группа I обходит робота i . Следовательно, $s_j(t_*-) = 0, \dot{s}_j(t_*) \geq \dot{s}_i(t_*) \forall j \in I$. Для таких j имеем $\alpha(t_*-) \geq \dot{s}_j(t_*) - \Xi[s_j(t_*-)] = \dot{s}_j(t_*) - \Xi[0] \geq \dot{s}_i(t_*) - \Xi[0] = \alpha(t_*)$, что противоречит изначальной гипотезе $\alpha(t_*-) < \alpha(t_*)$. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Объединяя Лемму D2, ii) в Лемме D5, Замечание D4 и Лемму D9, получаем следующее.

Следствие D5. *Начиная с некоторого момента t_* , утверждение iv) Теоремы 2 выполнено и $\dot{s}_i \equiv \Xi(s_i)$.*

Исходя из этого и Следствия D3, утверждения i)–iv) Теорем 1 и 2 верны.

6.5. Доказательство утверждения v) теорем 1 и 2

С этого момента принимаются предположения утверждения v), используем нумерацию из iv) в Теореме 1. Также введём криволинейную абсциссу \mathfrak{s} (длину дуги), натуральный параметр на неподвижной кривой Γ , и обозначим через \mathfrak{s}_i абсциссу \mathfrak{q}_i , посчитанную в направлении против часовой стрелки. Тогда

$$s_i = s_{i \rightarrow i \oplus 1} = \mathfrak{s}_{i \oplus 1} - \mathfrak{s}_i, \quad \dot{s}_{i \rightarrow j}(t) \stackrel{(A7)}{=} \dot{\mathfrak{s}}_j(t) - \dot{\mathfrak{s}}_i(t) \stackrel{\text{След. D5}}{=} \Xi[s_{j \rightarrow j \oplus 1}(t)] - \Xi[s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t)]. \quad (E1)$$

Лемма Е1. *Существует $\eta > 0$, такое что $s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t) \geq \eta \forall t \geq t_*$, где t_* взято из Следствия D5.*

Доказательство. Теорема Данскина^[3] гарантирует, что $\alpha(t) := \min_i s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t)$ абсолютно непрерывна и $\dot{\alpha}(t) = \min_{i \in M(t)} \dot{s}_{i \rightarrow i \oplus 1}(t)$ почти для всех $t > t_*$, где $M(t)$ — множество i , на которых достигается $\min_i s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t)$. Для $i \in M(t)$ и по (E1), имеем $\dot{s}_{i \rightarrow i \oplus 1}(t) = \Xi[s_{i \oplus 1 \rightarrow i \oplus 2}(t)] - \Xi[s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t)] \geq 0$ по (20). Следовательно, $\dot{\alpha}(t) \geq 0$ для почти всех $t \geq t_*$ и тогда $\alpha(t) \geq \eta := \alpha(t_*) > 0 \forall t \geq t_*$. \square

ω -предельное распределение $\mathcal{R} = [\mathfrak{r}_0, \dots, \mathfrak{r}_{N-1}]$ — это ω -предельная точка $R(t) := [\mathfrak{q}_0(t), \dots, \mathfrak{q}_{N-1}(t)]$, т.е. предел $\lim_{j \rightarrow \infty} R(t_j)$, ассоциированный с последовательностью $t_1 < t_2 < \dots < t_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$. По Теореме 1.1 Главы VII [7], множество \mathfrak{R} всех \mathcal{R} компактно и непусто. Пусть $s_{i \rightarrow j}(\mathcal{R})$ — длина дуги кривой Γ от \mathfrak{r}_i до \mathfrak{r}_j , посчитанная против часовой стрелки, и $s_{\min}(\mathcal{R}) := \min_i s_{i \rightarrow i \oplus 1}(\mathcal{R})$. По Лемме Е1, $s_{\min}(\mathcal{R}) > 0 \forall \mathcal{R} \in \mathfrak{R}$. Очевидно, и $s_{i \rightarrow j}(\mathcal{R})$, и $s_{\min}(\mathcal{R})$ зависят от $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ непрерывно. Напомним, что P — это периметр Γ .

Лемма Е2. *Для любого робота i $s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t) \rightarrow P/N$ при $t \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Непрерывное отображение $s_{\min}(\cdot) > 0$ достигает минимума $s_{\min}^- > 0$ на компактном множестве \mathfrak{R} в некоторой точке \mathcal{R} . Сначала покажем, что $s_{\min}^- \geq P/N$. Предположим противное. Тогда $s_{i \rightarrow i \oplus 1}(\mathcal{R}) = s_{\min}^- < P/N < \Delta^s$ для некоторого i , где последнее неравенство взято из v) Теоремы 1. Первое неравенство влечёт за собой, что равенство не может выполняться для всех i . Тогда существует робот i , такой что $s_{i \rightarrow i \oplus 1}(\mathcal{R}) = s_{\min}^-$ и $s_{i \oplus 1 \rightarrow i \oplus 2}(\mathcal{R}) > s_{\min}^- > 0$. Пусть $\{t_k\}_k$ будет последовательностью моментов, ассоциированной с \mathcal{E} . Тогда для достаточно больших k , имеем $s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t_k) \in (s_{\min}^- - \varepsilon, s_{\min}^- + \varepsilon)$ и $s_{i \oplus 1 \rightarrow i \oplus 2}(t_k) > s_{\min}^- + 3\varepsilon$, где $\varepsilon < (\Delta^s - s_{\min}^-)/3$. Используя константы из (20), (21), обозначим $\Delta t := \frac{\Xi' \varepsilon}{8 \Xi' \Xi}$, $t_k^- := t_k - \Delta t$ и обратим внимание, что для $k \approx \infty$,

$$\begin{aligned} t \in [t_k^-, t_k] &\Rightarrow \dot{s}_{i \rightarrow i \oplus 1}(t) \stackrel{(E1)}{=} \Xi[s_{i \oplus 1 \rightarrow i \oplus 2}(t)] - \Xi[s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t)] = \{\Xi[s_{i \oplus 1 \rightarrow i \oplus 2}(t_k)] - \Xi[s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t_k)]\} \\ &\quad + \{\Xi[s_{i \oplus 1 \rightarrow i \oplus 2}(t)] - \Xi[s_{i \oplus 1 \rightarrow i \oplus 2}(t_k)]\} + \{\Xi[s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t_k)] - \Xi[s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t)]\} \\ &\stackrel{(20), (21)}{\geq} \Xi(s_{\min}^- + 3\varepsilon) - \Xi(s_{\min}^- + \varepsilon) - \Xi' [|s_{i \oplus 1 \rightarrow i \oplus 2}(t) - s_{i \oplus 1 \rightarrow i \oplus 2}(t_k)| + |s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t) - s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t_k)|] \\ &\stackrel{(20), (21), (E1)}{\geq} \Xi' \varepsilon - 4 \Xi' \Xi |t - t_k| \geq \Xi' \varepsilon - 4 \Xi' \Xi \Delta t = \Xi' \varepsilon / 2. \end{aligned}$$

Из этого следует, что $s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t_k^-) \leq s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t_k) - \Xi' \varepsilon \Delta t / 2$. Выбирая сходящуюся подпоследовательность из $\{R(t_k^-)\}_k$ и переходя к пределу, мы получаем ω -предельное распределение \mathcal{R}^- , для которого $s_{\min}(\mathcal{R}^-) < s_{\min}^-$, что противоречит определению s_{\min}^- . Это противоречие доказывает, что $s_{\min}^- \geq P/N$.

Таким образом, $s_{i \rightarrow i \oplus 1}(\mathcal{R}) \geq P/N$ для всех i и $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$. Тем временем, $\sum_{i=0}^{N-1} s_{i \rightarrow i \oplus 1}(\mathcal{R}) = P$. Из этого следует

$$s_{i \rightarrow i \oplus 1}(\mathcal{R}) = P/N \quad \text{для всех } i \text{ и } \mathcal{R} \in \mathfrak{R}. \quad (\text{E2})$$

Теперь положим $s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t) \not\rightarrow P/N$ для некоторого i . Тогда существует последовательность $\{t_k\}$, такая что $s_{i \rightarrow i \oplus 1}(t_k) \rightarrow \Delta s \neq P/N$, $t_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Выбирая сходящуюся подпоследовательность из $\{R(t_k)\}_k$ и переходя к пределу, получаем ω -предельное распределение, для которого не выполняется (E2). Это противоречие завершает доказательство. \square

Доказательство теоремы 2: Утверждение теоремы непосредственно следует из Следствий D3, D5 и Леммы E2. \square

Доказательство теоремы 1: Утверждение теоремы непосредственно следует из Теоремы 2. \square

7. Результаты компьютерной симуляции

При моделировании были использованы следующие значения описанных параметров: $\bar{a} = 3.0 \text{ м/с}^2$, $\bar{v} = 5.0 \text{ м/с}$, $\Delta_{\text{viz}} = 100.0 \text{ м}$, $d_{\text{viz}} = 2.0 \text{ м}$, $\mu = 0.01 \text{ м/с}$, $\chi(d) = 300 \arctan \frac{d}{20}$, $\bar{a}_n = 2.0 \text{ м/с}^2$, $\bar{a}_\tau = \sqrt{5} \text{ м/с}^2$, $d_\downarrow = 1.5 \text{ м}$, $\Delta^s = 20\pi \text{ м}$, $\Xi(s) = 4s/\Delta^s$, $\delta_b = 0.2 \text{ м}$, $\varkappa_b = 0.002 \text{ м/с}^2$, период дискретизации $\tau = 0.05 \text{ с}$; на Рис. 1, $\delta_1 = 1/4$, $\delta_2 = 1/2$ и все функции линейные на промежутках, где они не являются постоянными. Измерения расстояний подвержены воздействию шума, равномерно распределённого на отрезке $[-0.005 \text{ м}, 0.005 \text{ м}]$. Для оценки производных использовались конечные разности, для решения ОДУ — метод Хойна (явный метод 3-го порядка семейства методов Рунге-Кутты).

На Рис. 2—4 роботы изображены небольшими цветными кругами с выступающим отрезком, показывающим вектор скорости. Целевая кривая Γ отображена пунктирной линией. Последний график на каждом рисунке показывает расстояния (по кривой Γ) между проекциями робота того же цвета и его предшественника.

На Рис. 2 кривая Γ представлена окружностью, центр которой перемещается вдоль вертикальной оси (вверх и вниз), а радиус со временем изменяется. Рис. 2 (а) показывает изначальное расположение шести роботов ($N = 6$). На Рис. 2 (f) четверо роботов достигли кривую Γ и перешли в режим \mathfrak{T} , оставшиеся два находятся в режиме \mathfrak{R} и приближаются к Γ . Рис. 2 (g) показывает, что все роботы достигли кривую Γ и находятся в режиме \mathfrak{T} . При этом, красный и синий робот находятся в непосредственной близости. На Рис. 2 (h), 9 секунд спустя, видим, что расстояния между этими роботами увеличилось, и теперь ни одна пара роботов не образует кластер. Впоследствии роботы движутся вдоль кривой Γ , избегая столкновений и сближений, соблюдая определённый порядок на кривой, не обгоняя друг друга. При этом на Рис. 2 (t) видно, что равномерное распределение не достигается. На Рис. 2 (i–s) можно заметить, что отклонение от равномерного распределения несущественно, и закон управления гарантирует покрытие роботами всей длины кривой Γ .

На Рис. 3 четыре робота ($N = 4$) преследуют кривую неизменяемой формы, которая периодически «покачивается» по часовой / против часовой стрелки вокруг геометрического центра кривой. На Рис. 3 (а) показано изначальное положение роботов. Как видно на Рис. 3 (f), роботы быстро достигают кривую Γ и переходят в режим \mathfrak{T} , при этом в этот момент половина кривой Γ остаётся без покрытия. Уже на Рис. 3 (j) видно, что роботы распределились по Γ более-менее равномерно, не оставляя частей без присмотра. По графику расстояний на Рис. 3 (t) понятно, что роботы сохраняют более-менее равномерное распределение в течение всего времени, при этом отклонение от желаемого значения $\approx \pm 5\%$.

На Рис. 4 рассматривается сценарий с постоянным изменением формы целевой кривой. Как и прежде, Рис. 4 (а) показывает изначальное положение роботов. На

Рис. 4 (f) все четыре робота достаточно близки к кривой Γ и переходят в режим \mathfrak{I} . При этом их распределение в этот момент далеко от равномерного, и большая часть кривой остаётся без присмотра. Уже через 50 с на Рис. 4 (l) видно, что роботы близки к равномерному распределению вдоль кривой Γ . Дальнейшие Рис. 2 (m–s) подтверждают, что роботы продолжают отслеживать изменяющуюся кривую Γ , а Рис. 2 (t) показывает близость их распределения к равномерному.

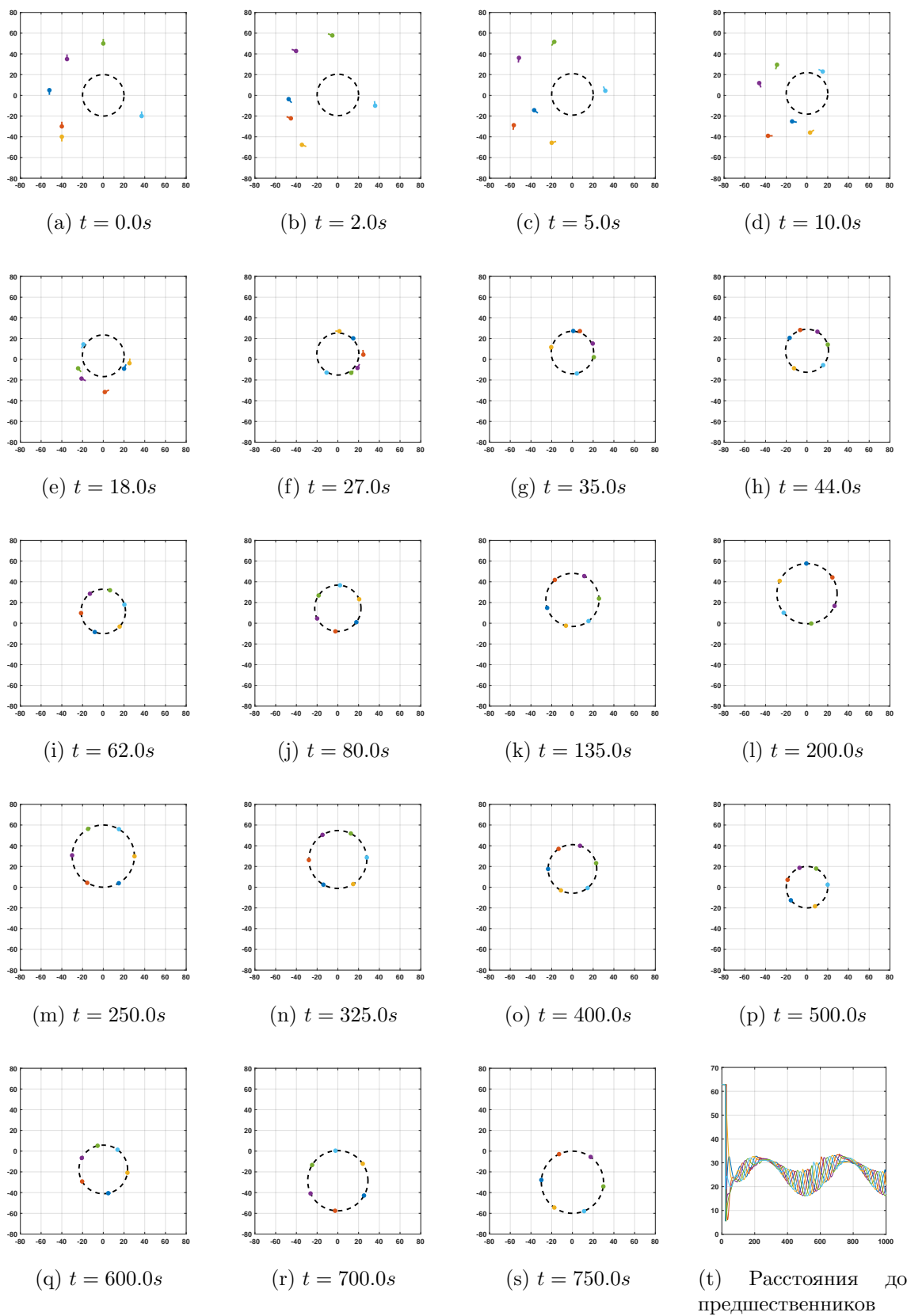


Рис. 2: Отслеживание подвижной пульсирующей окружности

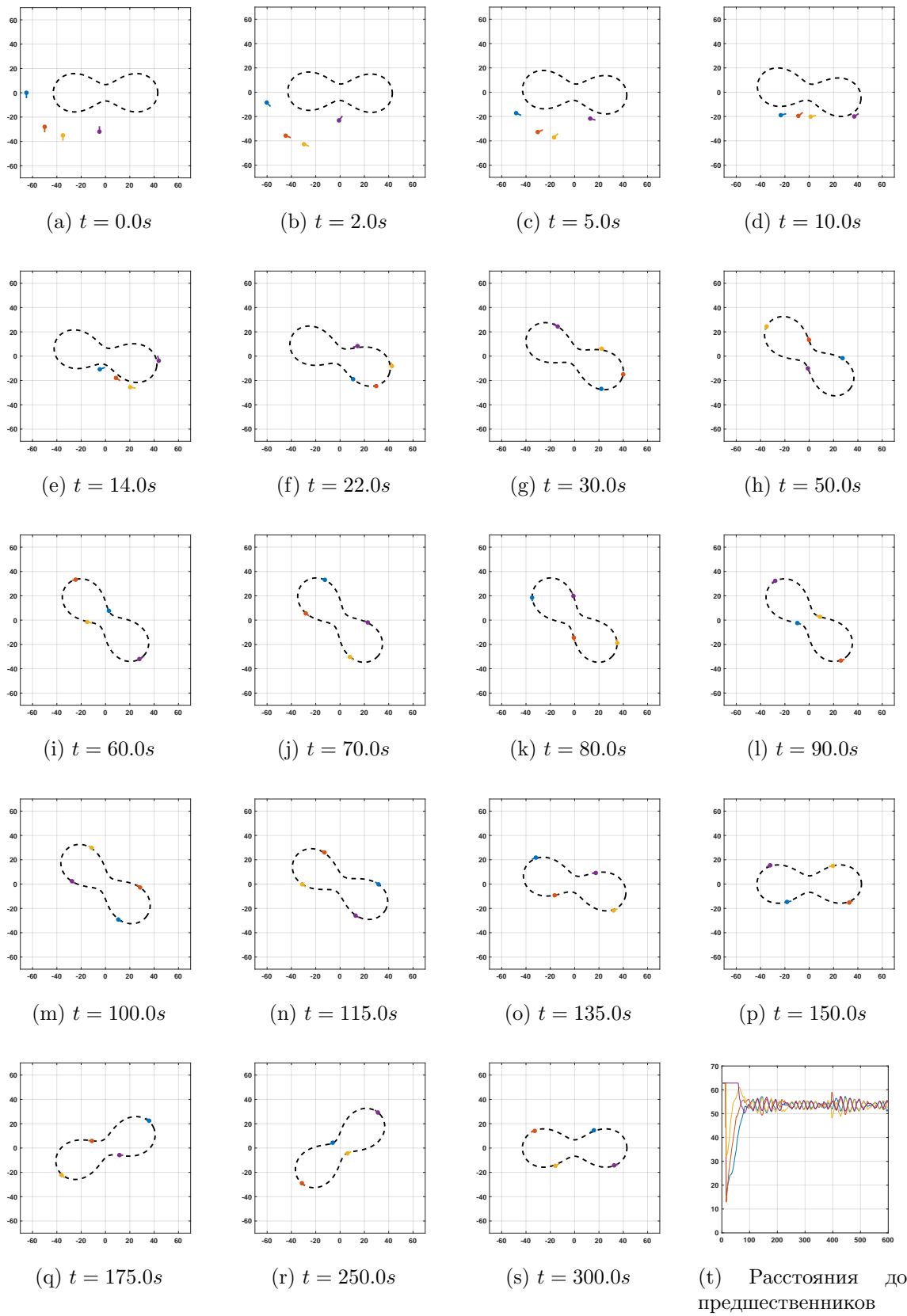


Рис. 3: Отслеживание качающейся неизменяемой кривой

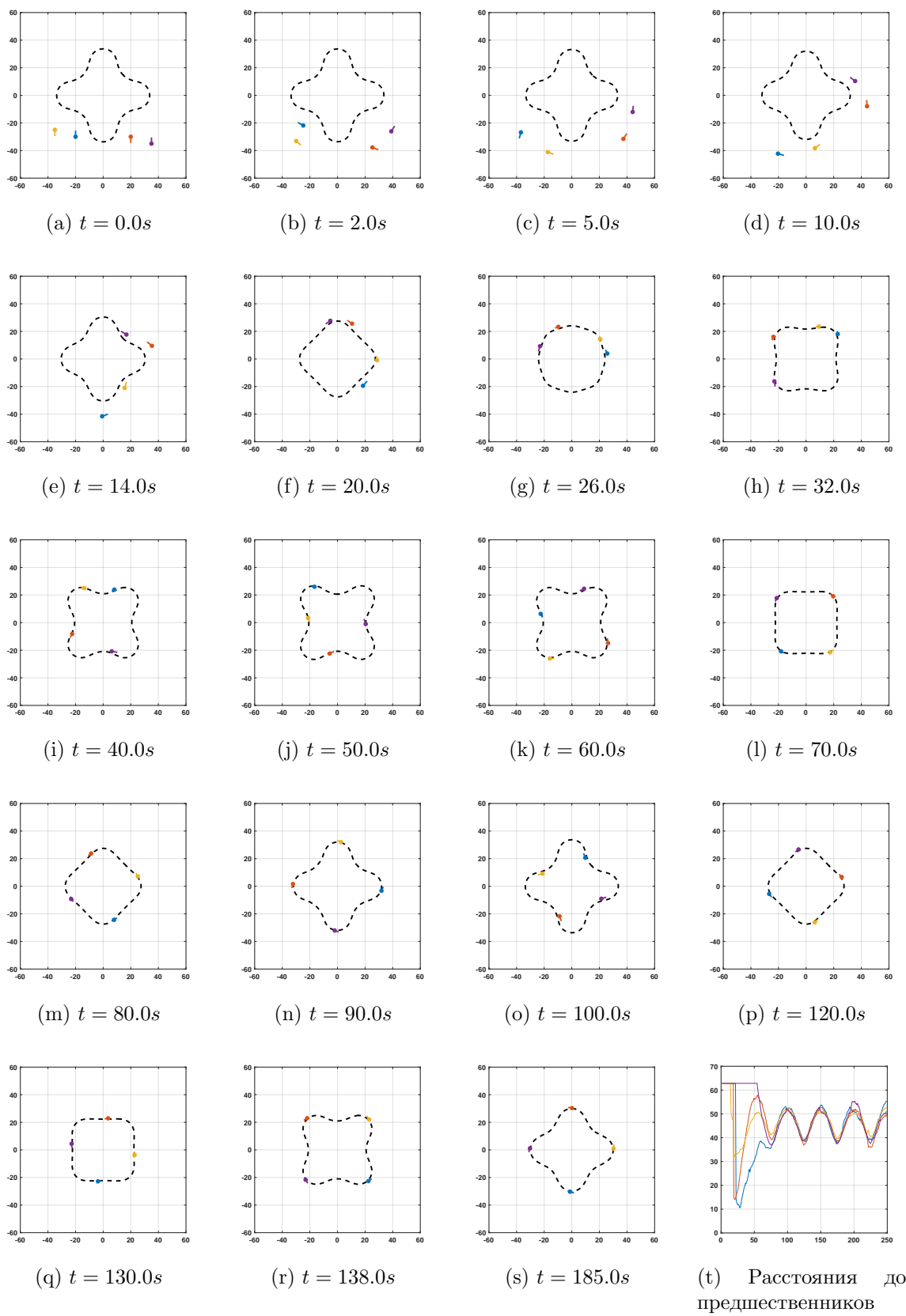


Рис. 4: Отслеживание кривой с изменяющейся формой

8. Заключение

В данной работе предложен распределённый закон управления, который автономно приводит группу роботов с ограниченной скоростью и ускорением к непредсказуемо движущейся и деформирующейся кривой Жордана и обеспечивает последующее её отслеживание в общем заранее заданном направлении. Наряду с этим данный закон управления гарантирует, что роботы распределены вдоль кривой, не образуя кластеры. В случае неподвижной кривой доказано, что это распределение является равномерным. Глобальная сходимость данного закона управления доказана и подтверждена примерами компьютерного моделирования.

Список литературы

- [1] Altenbach H., Öchsner A. Encyclopedia of Continuum Mechanics. — Berlin : Springer, 2020.
- [2] Ceccarelli N., DiMarco M. et al. Collective circular motion of multi-vehicle systems // Automatica. — 2008. — Vol. 44, no. 12. — P. 3025–3035.
- [3] Danskin J. M. The theory of min-max, with applications // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1966. — Vol. 14, no. 4. — P. 641–644.
- [4] Deghat M., Xia L. et al. Multi-target localization and circumnavigation by a single agent using bearing measurements // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2015. — Vol. 25, no. 14. — P. 2362–2374.
- [5] Filippov A. F. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. — Dordrecht, the Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [6] Guo J., Yan G., Lin Zh. Local control strategy for moving-target-enclosing under dynamically changing network topology // Systems and Control Letters. — 2010. — Vol. 59. — P. 654–661.
- [7] Hartman P. Ordinary Differential Equations. — Second edition. — Boston : Birkhäuser, 1982.
- [8] Kawakami H., Namerikawa T. Cooperative Target-capturing Strategy for Multi-vehicle Systems with Dynamic Network Topology // Proc. of the 2009 ACC. — St. Louis, MO, 2009. — June. — P. 635–640.
- [9] Kim T., Harab Sh., Hori Y. Cooperative control of multi-agent dynamical systems in target-enclosing operations using cyclic pursuit strategy // Int. J. Control. — 2010. — Vol. 83, no. 10. — P. 2040–2052.
- [10] Kim T., Sugie T. Cooperative control for target-capturing task based on a cyclic pursuit strategy // Automatica. — 2007. — Vol. 43, no. 8. — P. 1426–1431.
- [11] Kobayashi Y., Hosoe Sh. Cooperative Enclosing and Grasping of an Object by Decentralized Mobile Robots Using Local Observation // International Journal of Social Robotics. — 2012. — Vol. 4. — P. 19–32.
- [12] Kothari M., Sharma R. et al. Cooperative Target-capturing with Incomplete Target Information // Int. Journal of Intelligent and Robotic Systems. — 2013. — Vol. 72, no. 3–4. — P. 373–384.

- [13] Lan Y., Yan G., Lin Zh. Distributed control of cooperative target enclosing based on reachability and invariance analysis // *Systems and Control Letters*. — 2010. — Vol. 59. — P. 381–389.
- [14] Marshall J. A., Broucke M. E., Francis B. A. Pursuit formations of unicycles // *Automatica*. — 2006. — Vol. 42, no. 1. — P. 3–12.
- [15] Matveev A. S., Magerkin V. V. Robotic Following of Flexible Extended Objects: Relevant Technical Facts on the Kinematics of a Moving Continuum. — ArXiv: 2012.13240. — 2020.
- [16] Matveev A. S., Ovchinnikov K. S. Circumnavigation of a speedy unpredictable target by a group of speed- and acceleration-limited robots // *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*. — 2019. — Vol. 29, no. 4. — P. 1063–1087.
- [17] Matveev A. S., Semakova A., Savkin A. V. Range-only Based Circumnavigation of a Group of Moving Targets by a Non-Holonomic Mobile Robot // *Automatica*. — 2016. — Vol. 65. — P. 76–89.
- [18] Matveev A. S., Semakova A. A., Savkin A. V. Tight circumnavigation of multiple moving targets based on a new method of tracking environmental boundaries // *Automatica*. — 2017. — Vol. 79. — P. 52–60.
- [19] Matveev A. S., Teimoori H., Savkin A. V. A method for guidance and control of an autonomous vehicle in problems of border patrolling and obstacle avoidance // *Automatica*. — 2011. — Vol. 47, no. 3. — P. 515–524.
- [20] Matveev A. S., Wang C., Savkin A. V. Real-time navigation of mobile robots in problems of border patrolling and avoiding collisions with moving and deforming obstacles // *Robotics and Autonomous Systems*. — 2012. — Vol. 60, no. 6. — P. 769–788.
- [21] Oh K., Park M., Ahn H. A survey of multi-agent formation control // *Automatica*. — 2015. — Vol. 53. — P. 424–440.
- [22] Ovchinnikov K. S., Semakova A. A., Matveev A. S. Cooperative surveillance of unknown environmental boundaries by multiple nonholonomic robots // *Robotics and Autonomous Systems*. — 2015. — Vol. 72. — P. 164–180.
- [23] Ren W., Cao Y. Distributed coordination of multi-agent networks: emergent problems, models, and issues. — London : Springer-Verlag, 2010.
- [24] Sato K., Maeda N. Target-enclosing strategies for multi-agent using adaptive control strategy // *Proc. 2010 IEEE Int. Conf. Control Applications*. — Yokohama, Japan, 2010. — Sept. — P. 1761–1766.

- [25] Savkin A. V., Cheng T. M. et al. Decentralized Coverage Control Problems for Mobile Robotic Sensor and Actuator Networks. — Hoboken, NJ : Wiley and IEEE Press, 2015.
- [26] Shames I., Fidan B., Anderson B. D. O. Close target reconnaissance with guaranteed collision avoidance // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2011. — Vol. 21, no. 16. — P. 1823–1840.
- [27] Sinha A., Ghose D. Generalization of nonlinear cyclic pursuit // Automatica. — 2007. — Vol. 43. — P. 1954–1960.
- [28] Spencer J. A. M. Continuum Mechanics. — NY : Dover Publications, 2004.
- [29] Tsumura K., Hara S. et al. Performance Competition in Cooperative Capturing by Multi-agent Systems // SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration. — 2011. — Vol. 4, no. 3. — P. 221–229.
- [30] Yamaguchi H. A distributed motion coordination strategy for multiple nonholonomic mobile robots in cooperative hunting operations // Robotics and Autonomous Systems. — 2003. — Vol. 43. — P. 257–282.
- [31] Zakhar'eva A., Matveev A. S. et al. A strategy for target capturing with collision avoidance for non-holonomic robots with sector vision and range-only measurements // Robotica. — 2015. — Vol. 33, no. 2. — P. 385–412.